TP d'initiation à MATLAB n^0 8 : Calcul approché d'intégrales définies

En dehors de cas d'école présentés pendant les cours de mathématiques, il est en général impossible de calculer théoriquement la valeur numérique d'une intégrale définie (pour restreindre les notations, nous ne considérerons ici que des intégrales de type

$$I = \int_0^1 f(t)dt \quad \text{avec} \quad f \text{ une fonction Riemann-intégrable sur } [0,1]).$$

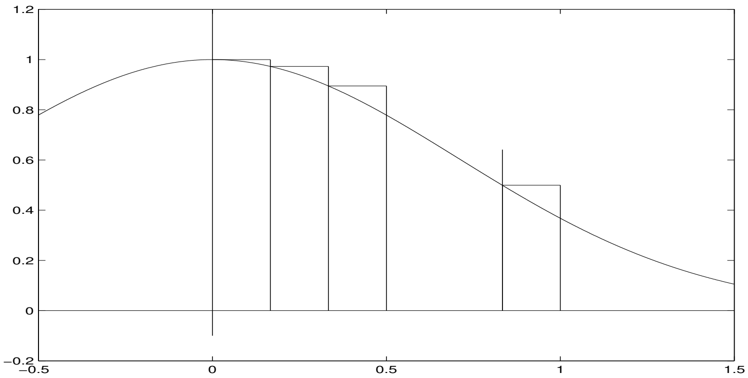
Un exemple, pourtant simple, sur lequel nous travaillerons est celui avec $f(t) = g(t) = \exp(-t^2)$. On doit alors utiliser des méthodes de calcul numérique pour donner une valeur approchée de I.

Sommes de Riemann

Une première méthode de calcul de I est de revenir à l'écriture de I sous sa forme d'une somme de Riemann. On rappelle ainsi que :

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}).$$

On obtient ainsi le graphe suivant (dans le cas ici de $n = 6$) : l'aire I est approchée par la somme des aires des rectangles.



Calculer ainsi une valeur approchée de I à partir de S_{10}, S_{100} et S_{1000} (travailler vectoriellement). La procédure semble-t-elle converger ?
La question essentielle ici est de connaître l'erreur d'approximation par cette méthode. Lorsque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on peut obtenir une majoration de cette erreur à partir d'une développement de Taylor de la fonction f en chaque point $\frac{k}{n}$. Plus précisément, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f(\frac{k}{n}) + (t-\frac{k}{n})f'(\theta_k)\right)dt \quad (\text{avec } \theta_k \in [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}(t-\frac{k}{n})f'(\theta_k)dt \end{aligned}$$

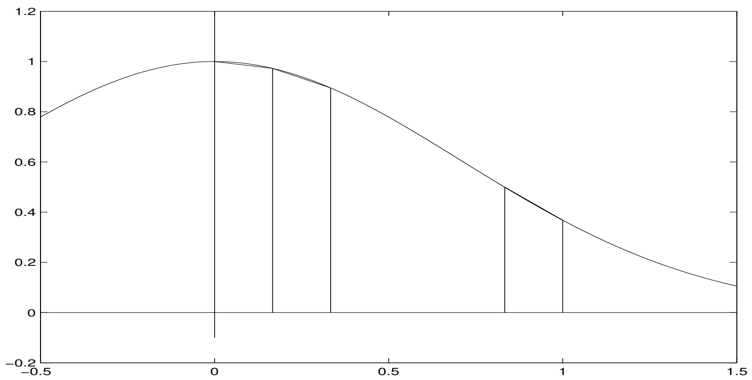
En conséquence, avec $M_1 = \sup_{0\le t\le 1}|f'(t)|$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|I-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}(t-\frac{k}{n})M_1\,dt\\ \text{soit}\quad \left|I-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right| &\leq \frac{M_1}{2n}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi une majoration de l'erreur commise. En déduire, dans le cas où $f = g$ une valeur de n suffisante pour obtenir une approximation de I à 10^{-4} près. Calculer alors cette valeur approchée de I.

Méthode des trapèzes

Cette fois-ci on approche l'aire I en remplaçant les rectangles de la figure précédente par les trapèzes suivants :



(on relie les points $\left(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n})\right)$ entre eux : entre ces points f est approchée par un polynôme de degré 1). Ecrire la somme permettant alors le calcul approché de I. Montrer que cela revient à considérer $\frac{1}{2}\left(f(\frac{k}{n})+f(\frac{k+1}{n})\right)$ à la place de $f(\frac{k}{n})$ dans l'expression de S_n. Calculer alors une majoration de l'erreur commise suivant le même modèle que précédemment mais en faisant maintenant intervenir $M_2 = \sup_{0\leq t\leq 1}|f''(t)|$ (on supposera alors que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$). En déduire une valeur de n suffisante pour obtenir une approximation de I à 10^{-4} près.

Méthode de Simpson

On améliore encore l'approximation en approchant f sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ par un polynôme de degré 2 passant par les points $\left(\frac{k}{n}, f(\frac{k}{n})\right)$, $\left(\frac{2k+1}{2n}, f(\frac{2k+1}{2n})\right)$, $\left(\frac{k+1}{n}, f(\frac{k+1}{n})\right)$. Montrer qu'alors on considère la somme

$$T_n = \frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(\frac{2k}{2n})+4f(\frac{2k+1}{2n})+f(\frac{2k+2}{2n})\right].$$

En supposant maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$, avec $M_4 = \sup_{0\leq t\leq 1}|f^{(4)}(t)|$, donner une majoration de l'erreur d'approximation de I. En déduire une valeur de n suffisante pour obtenir une approximation de I à 10^{-4} près. Calculer I à 10^{-10} près.

Exercices

1. Que se passerait-il pour les trois méthodes précédentes si f avait par exemple un point de discontinuité en $1/2$? Quelle méthode choisireriez-vous alors ?
2. Comparer les trois méthodes avec la fonction préprogrammée par Matlab, *quad*, qui permet d'obtenir directement une valeur approchée d'une intégrale définie.