TP d'initiation à MATLAB n^0 7 : Séries numériques

Dans ce TP, on calcule des sommes partielles de différentes séries pour exhiber leur éventuelle convergence. Par la suite, on se sert de séries pour calculer des valeurs approchées de π. Enfin, on se rendra compte qu'un calcul numérique même très précis est souvent insuffisant pour connaître la nature d'une série.

Sommes partielles

Dans toute la suite, on considère une série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels. On considérera la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque la série est convergente, On considérera le reste d'ordre n de la série, défini par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Soit $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^4}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le résultat théorique concernant la nature de cette série. Faire un programme permettant de tracer S_n en fonction de n avec n variant de 1 à 10000. La suite (S_n) semble-t-elle converger ? Faire la même chose avec $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Quelle série converge le plus rapidement ? Comment expliquez-vous ce résultat ?
2. On peut montrer (à l'aide des séries de Fourier) que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

En déduire, pour les deux séries, le tracé de R_n en fonction de n avec n variant de 1 à 10000 (on fera les 2 tracés sur le même graphe en utilisant la commande *hold*). Faire aussi, pour les deux séries, le tracé de $\ln(R_n)$ en fonction de $\ln(n)$ avec n variant de 1 à 10000. Expliquer le résultat obtenu. A quelles conclusions en arrive-t-on quant à la vitesse de convergence des 2 séries ?

Calcul approché de π

On reprend pour commencer les séries proposées lors du partiel et permettant d'obtenir des valeurs approchées de π.

1. Soit la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{4}{2n+1}$. On admettra que cette série a pour somme π (ce qui se montrera facilement après le cours sur les séries entières). Vérifier numériquement que S_{10000} est proche de π (pour ce calcul on ne fera pas de boucle, mais on travaillera en faisant la somme du vecteur constitué des $(u_n)_{0\leq n\leq 10000}$). Calculer R_n pour $n = 100, 1000, 10000$ et le comparer avec la majoration du reste obtenue à partir du critère de convergence des séries alternées. Cette majoration est-elle très éloignée de la vraie valeur. Calculer une approximation de π à partir de la série à 10^{-4} près.

2. Soit la série de terme général $u_n = 6\dfrac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2(2n+1)}$. On admettra que cette série à pour somme π (ce qui se montrera facilement après le cours sur les séries entières). Vérifier numériquement que S_{10} est proche de π (pour ce faire on calculera $n!$ à partir de la commande $gamma(n+1)$ de Matlab plutôt qu'à partir de la commande $factorial(n)$ qui ne permet pas travailler vectoriellement). Pour avoir à l'écran un grand nombre de décimal, on tapera la commande Matlab *format long e*. Vérifier que S_{10} est une très bonne approximation de π. A partir de quelle valeur de n (en faisant croître n) n'améliore-t-on plus la précision ? Pourquoi ? Comment faire pour calculer S_{200} ?

Limites du calcul numérique

Cette partie a pour but de montrer que quelque soient les performances des logiciels de calcul numérique, il y a encore un sens et de l'intérêt à faire des mathématiques "théoriques"...

1. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Rappeler le résultat théorique sur la convergence de cette série. Tracer S_n en fonction de n avec n variant de 1 à 10000. La suite (S_n) semble-t-elle converger ? tracer alors $S_n - \ln(n)$ en fonction de n avec n variant de 1 à 10000. Conclusions ? Expliquer théoriquement le résultat.

2. Soit les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{n!}{1000^n}$ et $v_n = \dfrac{1000^n}{n!}$. Numériquement, déterminer quelle série converge et quelle série diverge. Répondre à la même question théoriquement. Conclusion ?