TP d'initiation à MATLAB n^0 10 : Résolution numérique d'une équation différentielle

On suppose dans tout ce TP que l'on veut résoudre l'équation différentielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & f(x, y(x)) \quad \text{pour} \quad x \in [0,T], \\ y(0) & = & y_0 \quad \text{avec} \quad y_0 \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \tag{1}$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ avec $T > 0$. Ce type d'équations se retrouvent dans de nombreux problèmes de mécanique, d'électricité, de cinétique chimique,... En général, on ne peut pas trouver la solution théorique à une telle équation différentielle (en revanche, on sait qu'il existe une solution unique à cette équation). Aussi est-on amené à utiliser des méthodes numériques d'approximation de la solution. Nous voyons dans ce TP les méthodes d'Euler.

Un exemple

On s'intéresse à l'équation particulière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & -2y(x) \quad \text{pour} \quad x \in [0,T], \\ y(0) & = & y_0 \quad \text{avec} \quad y_0 \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Résoudre théoriquement cette équation.
2. En vous référant à l'aide de Matlab, utiliser la commande $ode23$ pour déterminer une approximation de la solution sur l'intervalle $[0, 5]$ avec une résolution de 100 (on prendra comme condition initiale $y_0 = 0$, puis $y_0 = 1$ et $y_0 = -5$.
3. Représenter sur le même graphe les solutions théorique et approchée de l'équation (2) pour une résolution de 100, puis de 1000. Déterminer la distance maximale entre ces 2 courbes.

Méthodes d'Euler

Pour résoudre numériquement l'équation (1) par une méthode d'Euler, l'idée est d'abord de diviser l'intervalle $[0,T]$ en N sous-intervalles à partir de de $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_N = T$. On cherche alors une approximation $\widehat{y}_i$ (ou $\tilde{y}_i$) de $y(x_i)$ pour $0 \leq i \leq N-1$, ce qui constituera notre approximation de y sur $[0,T]$. En notant $h_i = x_{i+1} - x_i$, on utilise les formules de Taylor pour $i = 0, 1, \cdots, N-1$:

$$y(x_{i+1}) \sim y(x_i) + h_i y'(x_i), \quad \text{(on choisit les } h_i \text{ suffisamment petits)}$$

pour construire de façon récursive la solution de (1).

Méthode d'Euler explicite

Du développement limité précédent, on en déduit que

$$f(x_i, y(x_i)) = y'(x_i) \simeq \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i} \simeq \frac{\widehat{y}_{i+1} - \widehat{y}_i}{h_i},$$

car y est solution de (1). On obtient donc une construction itérative d'une famille $(\widehat{y}_i)_{0 \leq i \leq N}$ de la façon suivante :

$$\widehat{y}_{i+1} = \widehat{y}_i + h_i f(x_i, \widehat{y}_i) \quad \text{avec} \quad \widehat{y}_0 = y_0.$$

Construire un programme $Eulerexp.m$ qui détermine le vecteur $(\widehat{y}_i)_{0 \leq i \leq N}$ avec pour entrée T, N, y_0 et en utilisant une fonction $feuler.m$ contenant la fonction f de (1) (on choisira une discrétisation régulière de $[0,T]$ en N sous-intervalles égaux). Appliquer ce programme dans le cas de l'exemple précédent.

Méthode d'Euler implicite

En utilisant la même méthode que précédemment, on peu écrire que :

$$f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) = y'(x_{i+1}) \simeq \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i} \simeq \frac{\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_i}{h_i}.$$

On obtient alors une seconde approximation de y par le vecteur $(\tilde{y}_i)_{0 \leq i \leq N}$ défini par la suite récurrente suivante :

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h_i f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \quad \text{avec} \quad \tilde{y}_0 = y_0.$$

Expliquez la différence entre cette suite et la précédente. Comment faire pour construire cette suite ? Établir un programme *Eulerimp.m* qui détermine le vecteur $(\tilde{y}_i)_{0 \leq i \leq N}$ avec pour entrée T, N, y_0 et en utilisant la fonction $feuler.m$ (on choisira une discrétisation régulière de $[0, T]$ en N sous-intervalles égaux). Appliquer ce programme dans le cas de l'exemple précédent.

Exploitation des méthodes d'Euler

1. Faire un programme qui trace les solutions théorique et approchées de l'équation (2) pour les mêmes paramètres (T, N et y_0). En augmentant progressivement N, que remarquez-vous ?

2. Utiliser les mêmes programmes pour la fonction f suivante $f(x, y(x)) = -200x\, y^2(x)$ et avec $y(0) = 1$. Que remarquez-vous alors ?