TD UEF03 n^0 9

Variables aléatoires continues

1. **(*)** On considère la densité de probabilité de la variable aléatoire X, définie par:

$$f(x) = k(9 - x^2) \; si \; 0 \leq x \leq 3, \; et \; 0 \; sinon$$

   (a) Déterminer k pour que f soit bien une densité de probabilité.

   (b) Déterminer alors la fonction de répartition F de X.

   (c) Déterminer $P(X > 2)$ et $P(1 < X \leq 2)$.

2. **(*)** On dit que la variable aléatoire X suit une distribution exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; si \; 0 \leq x, \; et \; 0 \; sinon$$

   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

   (b) Calculer $\mathbb{E}X$.

   (c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (d) Calculer la médiane m de X (telle que $P(X \leq m) = 0.5$).

   (e) Un employé à un guichet vide veut s'absenter un instant. Le temps d'attente jusqu'au prochain client peut être modélisé par une variable aléatoire T de distribution exponentielle et de moyenne 4 mn. Quelle est la probabilité qu'un client arrive en moins de 3 mn? Que personne n'arrive avant 1h?

3. **(*)** On suppose qu'une variable aléatoire U est distribuée uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$ et on pose $Y = \min\{U, 1 - U\}$.

   (a) Déterminer (et tracer) la fonction de répartition F de Y.

   (b) Déterminer la densité de la variable Y.

   (c) Déterminer la densité de $2Y$.

   (d) Déterminer $\mathbb{E}Y$ et $\mathrm{var}Y$.

4. **(**)** Un tremblement de terre de magnitude M délivre une énergie X telle que $M = \log X$. Pour un tremblement de terre de magnitude supérieure à 3, on suppose que $M - 3$ suit une loi exponentielle de moyenne 2.

   (a) Déterminer $\mathbb{E}M$ et $\mathrm{var}M$ pour un tremblement de terre de magnitude supérieure à 3.

   (b) Déterminer alors la densité de X et son espérance.

   (c) On considère deux tremblements de terre indépendants de magnitude supérieure à 3. Quelle est la probabilité que la magnitude du plus petit des deux soit supérieure à 4?

5. **(*)** On suppose qu'avec une balance, l'erreur sur la pesée d'un corps est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0; (0.08)^2)$. Soit X la variable aléatoire égale au résultat de la pesée d'un corps de masse exacte 72.37 g. Calculer la probabilité $P(72.3 \leq X < 72.5)$. Déterminer un intervalle I tel que $P(X \in I) = 0.98$.

6. **(*)** On suppose la variable aléatoire X à valeurs dans $[1, +\infty[$, telle que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = a\frac{1}{x}^3 .$$

   Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Calculer l'espérance et la variance de X.

7. **(**)** Le temps d'attente (en mn) à une station service est une variable aléatoire T telle que

$$\forall t \geq 0, \quad P(T > t) = a(t^2 + 1)\exp(-2t).$$

   Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Calculer $P(1 \leq T \leq 2)$ et la probabilité de mettre moins de 3 mn pour être servi. Déterminer la densité de probabilité de T, et calculer son espérance et sa variance.