TD UEF03 n^0 8

Probabilités et variables discrètes

1. **(*)** On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que ce soit une dame (décrire l'ensemble fondamental, la tribu associée et la probabilité considérée) ? On en choisit deux. Quelle est la probabilité que ce soit deux dames (décrire l'ensemble fondamental, la tribu associée et la probabilité considérée) ?

2. **(*)** On constate qu'en France il y une personne sur 6 qui possède un ordinateur personnel et une personne sur 25 qui est chauve. On constate aussi que une personne sur 75 est chauve et possède un ordinateur personnel. Quel est le pourcentage de Français chevelus? De Français chauves sans ordinateur? De Français chevelus avec ordinateur? De Français chevelus sans ordinateur?

3. **(**)** On demande à 5 personnes d'écrire leur nom sur un papier, puis on mélange les papiers et on les redistribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne ait le papier avec son nom? Que tous aient le papier avec leur nom?

4. **(*)** On considère une population composée de 48% d'hommes et de 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est de 0.05, qu'une femme soit daltonienne 0.0025. Quelle proportion de la population est daltonienne?

5. **(*)** On a lancé 10 fois une pièce non biaisée et l'on a obtenu 10 fois pile. Quelle était la probabilité d'un tel tirage? On lance une onzième fois la pièce. Quelle est la probabilité d'avoir pile sachant que les dix lancés précédents étaient des piles? Quelle est la probabilité que le onzième lancé soit pile?

6. **(**)** On jette trois dés. Calculer la probabilité que l'un de ces dés montre 1? Calculer la probabilité que l'un de ces dés montre 1 sachant que les trois ont montré des chiffres différents?

7. **(*)** On effectue le dépistage systématique sur une population donnée d'une maladie qui affecte en général 15% des individus. On réalise un test qui donne 95% de résultats positifs pour les personnes malades et 10% de résultats positifs parmi les non malades. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard soit malade sachant que le test a donné un résultat positif? soit non malade sachant que le test a donné un résultat négatif?

8. **(**)** Deux joueurs d'échecs effectuent un match en trois parties. Lorsque ces deux joueurs se rencontrent on sait en général que A gagne une fois sur 4, que B gagne une fois sur 3 et que le reste du temps il y a nul. Sachant que l'on sait après le tournoi que c'est le même joueur qui a gagné les trois parties, quelle est la probabilité que ce soit A?

9. **(**)** On dispose de 10 pièces numérotées de 1 à 10 et telle que la probabilité d'obtenir pile avec la pièce i soit de $i/10$. Une pièce est choisie au hasard parmi les 10. Lorsqu'on la lance, on obtient pile. Quelle est la probabilité que ce soit la cinquième pièce?

10. **(*)** On considère 4 lettres et les 4 enveloppes correspondantes. On met au hasard les 4 lettres dans les enveloppes et on définit la variable aléatoire X comme le nombre de lettres qui atteindront leur destinataire. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

11. **(**)** Des sondages montrent que 10% de la population est constituée de gauchers. On considèrera qu'une personne prise au hasard a une probabilité de 0.1 d'être gauchère.

    Calculer la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne: a/ un seul gaucher, b/ exactement trois gauchers, c/ au moins deux gauchers.

    (a) Un atelier de couture est équipé de 7 paires de ciseaux pour droitiers et de 3 pour gauchers. Quelle est la probabilité pour que les 8 membres du personnel trouvent chacun une paire de ciseaux lui convenant?

    (b) Soit X la variable aléatoire "nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseaux à sa convenance". Dresser un tableau donnant X en fonction du nombre G de gauchers dans les huit membres du personnel. En déduire la loi de probabilité de X, et calculer $\mathbb{E}X$ et $\mathrm{var}X$.

12. **(*)** On considère 8 hommes et 8 femmes, dont on extrait par tirage au sort un groupe de 8 personnes. On note N la variable aléatoire égale au nombre de femmes du groupe. Calculer la probabilité $P(3 \leq N \leq 5)$. Donner la loi de probabilité de N, son espérance et sa variance.

13. **(**)** On suppose la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité. Quelle est l'espérance de X?

14. **(***)** On suppose que le nombre de connections par jour sur un serveur internet est N, variable aléatoire, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = a\frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1},$$

avec $\lambda \in]0,1[$. Déterminer a pour que l'on ait bien une loi de probabilité (utiliser les séries entières). Calculer $P(0 \leq N \leq 2)$ et la probabilité qu'il y ait eu plus d'une connection dans la journée. Calculer l'espérance et la variance de N.

15. **(***) Paradoxe de Saint-Petersbourg** Je vous propose le jeu suivant: je vous donne $10000F$, puis vous lancez une pièce équilibrée; si le résultat est Pile, vous me donnez $2F$ et la partie s'arrête. Si le résultat est Face, vous lancez à nouveau la pièce; si le résultat est Pile, vous me donnez $4F$ et la partie s'arrête. Si le résultat est Face, vous lancez à nouveau la pièce; si le résultat est Pile, vous me donnez $8F$ et la partie s'arrête. Par itération, si au n-ième lancer le résultat est Pile, vous me donnez 2^nF et la partie s'arrête; sinon, vous lancez à nouveau... Calculer l'espérance de mon gain, puis celle du vôtre. N'auriez-vous pas pourtant envie de jouer à ce jeu?

16. **(**)** On répartit une suspension de bactéries contenant 500 bactéries par ml dans des échantillons de 0,01 ml. Après un certain temps chaque bactérie a été le germe d'une colonie de bactéries et il est possible de les compter au microscope. On modélise donc N le nombre dans un échantillon par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

    (a) Calculer var$N$.

    (b) Déterminer $P(N = 5)$ et $P(N > 5)$.

    (c) En fait chaque bactérie a seulement une chance sur trois de donner naissance à une colonie. Calculer la probabilité de ne pas observer de colonie de bactéries dans un échantillon. Donner la nouvelle loi de N.

17. **(**)** On lance une pièce de monnaie truquée, telle que la probabilité d'apparition de "Face" est le double de celle de "Pile".

    (a) On lance la pièce jusqu'à obtenir un "Pile". On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce "Pile". Donner la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance. Déterminer $P(X = 3)$ et $P(1 \leq X \leq 3)$.

    (b) On lance alors à nouveau la pièce jusqu'à obtenir un "Pile" et on note Y le nombre de lancers depuis le premier "Pile". Donner la loi de Y.