TD UEF05 n^0 11 et 12

Séries de Fourier

1. **(*)** Soit f la fonction 2π-périodique, impaire, telle que pour $x \in]0,\pi[$ on ait $f(x) = 1$, $f(0) = f(\pi) = 0$.
   (a) Représenter graphiquement f.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f. En le justifiant, donner le développement en série de Fourier de f.
   (c) En déduire que $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
   (d) A l'aide du Théorème de Bessel (à justifier), montrer que $S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
   (e) En déduire $S_3 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $S_4 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ (on pourra trouver une relation entre S_2 et S_3).
2. **(**)** Soit f la fonction 2π-périodique, impaire, telle que pour $x \in]0,\pi]$ on ait $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, et $f(0) = 0$.
   (a) Représenter graphiquement f.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f. En le justifiant, donner le développement en série de Fourier de f.Qu'obtient-on lorsque $x = \pi/2$?
   (c) Appliquer, en le justifiant, le Théorème de Bessel. Quelle est la série obtenue?
3. **(**)** Soit f la fonction 2π-périodique, paire, telle que pour $x \in [0,\pi]$ on ait $f(x) = x$.
   (a) Représenter graphiquement f.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f. En le justifiant, donner le développement en série de Fourier de f.
   (c) . En déduire après deux intégrations de la série de Fourier la valeur de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.
   (d) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
4. **(***)** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que pour $t \in [0,\pi[$, $f(t) = (\pi - t)\sin(t)$.
   (a) Déterminer f' et f'' sur $]0,\pi[$. Montrer que $f''(t) \leq 0$ pour $t \in]0,\pi/2[$. En déduire qu'il existe $\alpha \in]0,\pi/2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. En déduire le signe de f' sur $]0,\pi/2[$.
   (b) Montrer que $f'(t) \leq 0$ pour $t \in]\pi/2,\pi[$. En déduire le tableau de variation de f sur $[0,\pi[$, puis représenter graphiquement f.
   (c) Calculer les coefficients de Fourier $a_0(f)$, $a_1(f)$, puis $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

(d) En le justifiant rigoureusement, donner le développement en série de Fourier de $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. En choisissant une valeur particulière de t, en déduire existences et valeurs des séries $S = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$ et $S' = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-1}$.

(e) A l'aide du théorème de Bessel, déterminer $S'' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k^2-1)^2}$.

5. **(**)** Développer en série de Fourier la fonction f, périodique de période 2π, telle que pour $t \in [-\pi, \pi[$, $f(t) = e^t$. En déduire $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$ et $S' = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$, puis $S'' = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k^2+1)^2}$.