TD UEF03 n^0 6

Applications de la diagonalisation

1. **(*)** On considère, pour x et y, deux fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le système différentiel (S):

$$(S) \begin{cases} x'(t) = \frac{1}{3}x(t) + \frac{2}{3}y(t) + 1 \\ y'(t) = \frac{1}{4}x(t) + \frac{3}{4}y(t) \end{cases}$$

On note (SH) le système homogène associé:

$$(SH) \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{3}u(t) + \frac{2}{3}v(t) \\ v'(t) = \frac{1}{4}u(t) + \frac{3}{4}v(t) \end{cases}$$

   (a) Solutions de (SH).
   On considère $W(t)$ le vecteur $(u(t), v(t))$. Montrer que (u, v) est solution de (SH) si et seulement si W est solution de l'équation $W'(t) = A \cdot W(t)$, où A est une matrice que vous exprimerez. Diagonaliser $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, écrire l'équation que vérifie $\tilde{W}(t) = P^{-1} \cdot W(t)$, en déduire $\tilde{W}(t)$ en fonction de $\tilde{W}(0)$ et enfin calculer $u(t)$ et $v(t)$ en fonction de $u(0)$ et $v(0)$.

   (b) Résolution de (S).
   Trouver deux réels a et b tels que les fonctions constantes $x(t) = a$ et $y(t) = b$ soient une solution particulière de (S). On résoud ensuite S pour des fonctions x et y quelconques, $x(0)$ et $y(0)$ étant fixés. Montrer que $u(t) = x(t) - a$ et $v(t) = y(t) - b$ sont une solution de (SH). En déduire $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de $x(0)$ et $y(0)$.

2. **(*)** Résoudre le système différentiel (S_2):

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

3. **(*)** Résoudre le système différentiel (S_3):

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -10x(t) + 6y(t) + 8z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

4. **(**)** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''' - 2y'' + 3y' - 2y = 0$ en considérant le vecteur $Y = {}^t(y'', y', y)$ et en diagonalisant la matrice liant Y' à Y.

5. **(**)** Écrire en fonction de n, u_0 et v_0 les termes généraux u_n et v_n de deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les équations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$$

Indication : on peut utiliser une écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$