TD UEF05 n^0 9 et 10

Séries entières

1. **(*)** Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes, puis étudier la convergence sur le cercle de convergence:

   - $S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{n+1} z^n$
   - $S_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n^3+n} z^n$
   - $S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+3}{n+1} z^n$.
   - $S_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n) z^n$
   - $S_5(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n! z^{n^2}$

2. **(*)** Après avoir déterminer leur rayon de convergence, calculer la somme des séries entières suivantes:

   - $S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$
   - $S_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} z^n$
   - $S_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(2n) z^n$ $(z \in \mathbb{R})$

3. **(**)** Après avoir déterminer leur rayon de convergence, calculer la somme des séries entières suivantes:

   - $S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2n+1}$.
   - $S_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$.
   - $S_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n(2n-1)}$ et en déduire $c = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)}$.
   - $S_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4 z^n}{n!}$.

4. **(**)** On désire connaître une valeur approchée de $\alpha = \int_0^1 e^{-t^2} dt$ à 10^{-3} près.

   - Montrer que α existe.
   - Donner le développement en série entière de $f(t) = e^{-t^2}$, puis celui de $F(t) = \int_0^t f(x)dx$.
   - Donner une majoration du reste issu du développement de $F(1)$ et conclure.

5. **(***)** A quelles conditions doit satisfaire la suite (a_n) pour que la série $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie l'équation différentielle $4xy'' + 2y' + y = 0$. Déterminer la suite (a_n) lorsque $a_0 = 1$. Montrer que la série obtenue est continue, dérivable et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer enfin que la somme de cette série est $\cos\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $\mathrm{ch}\sqrt{-x}$ pour $x \leq 0$.

6. **(**)** Donner le développement en série entière, en précisant le domaine de convergence de la série, des fonctions suivantes:

- $f_1(x) = \dfrac{x}{x-2}$
- $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$
- $f_3(x) = \arctan(a+x)$ avec $a \in \mathbb{R}$
- $f_4(x) = \arctan(1+\dfrac{1}{x})$

7. **(**)** Donner le développement en série entière, en le justifiant, des fonctions suivantes:
   - $f_1(x) = \cos^2(x)$.
   - $f_2(x) = ln\left(\dfrac{1+x}{2-x}\right)$.
   - $f_3(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$.
   - $f_4(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.