TD UEF03 n^0 5

Exercices supplémentaires de diagonalisation

1. **(*)** Diagonaliser (déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et sous-espaces propres associés, préciser si la matrice est diagonalisable et, si oui, donner une base de diagonalisation) la matrice M suivante:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. **(*)** Même question avec
$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. **(**)** Même question avec
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **(**)** Même question avec
$$M = \begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 2b & -c \end{pmatrix}, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

5. **(***)** Soit X un vecteur colonne réel de taille n, non nul. Vérifier que ${}^tX.X$ est un réel positif non nul. On considère la matrice $M = \frac{1}{{}^tX.X} X.{}^tX$. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de matrice M dans une base e de $\mathbb{R}^n$. En déduire le rang de M. Diagonaliser M et en déduire la nature de l'endomorphisme associé à M.

6. **(*)** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est:
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & -4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^n et A^{-1}.

7. **(**)** Déterminer toutes les matrices B vérifiant $B^2 = A$, où:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. **(***)** Soit A une matrice à coefficients réels d'ordre n, vérifiant $A^3 - 4A^2 + 5A = 0$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. En déduire que le rang de A est pair.

9. **(**)** Calculer A^n et $\exp(A)$ pour la matrice A suivante (avec u, v, w des réels non nuls):
$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & v/u & w/u \\ u/v & -1/2 & w/v \\ u/w & v/w & -1/2 \end{pmatrix}.$$

10. **(**)** Calculer A^n pour la matrice A suivante (avec $a \neq 0$):
$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$