TD UEF03 n^0 4

Vecteurs et valeurs propres

1. **(*)** Soit les trois matrices **réelles** suivantes, que l'on pourra considérer comme les matrices d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dans la base $e = ((1,0),(0,1))$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Pour chacune d'entre elles,

   (a) Calculer les valeurs propres.

   (b) Calculer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

   (c) Déterminer si la matrice est diagonalisable.

   (d) Le cas échéant, écrire explicitement la matrice sous la forme $P^{-1}DP$ où D est une matrice diagonale.

   (e) Calculer M^n.

2. **(**)** Reprendre l'exercice précédent en considérant que ces trois matrices sont à coefficients complexes, qu'elles sont les matrices d'endomorphismes de $\mathbb{C}^2$ dans la base $e = ((1,0),(0,1))$ et qu'elles peuvent ainsi admettre des vecteurs propres à coefficients complexes et une décomposition $P^{-1}DP$ avec des matrices P et D à coefficients complexes.

3. **(**)** On veut calculer le terme général de la suite u telle que $u_0 = A$, $u_1 = B$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Voici une méthode différente de l'exercice 10 de la feuille de TD n1.

   (a) Trouver une matrice M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

   (b) Calculer M^n.

   (c) En déduire u_n.

4. **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^3$ de base $e = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'application $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que:

$$M = Mat(u, e, e) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer les valeurs propres de u.

   (b) Déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

   (c) Vérifier que u est diagonalisable et calculer $u^n(e_1)$, $u^n(e_2)$ et $u^n(e_3)$.

5. **(**)** Soit M la matrice suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de M. Le factoriser.

   (b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

   (c) Calculer M^n.

6. **(**)** Mêmes questions avec M la matrice suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

7. **(**)** Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) En tant que matrice réelle, est-ce que M est diagonalisable?

   (b) Considérer maintenant M comme une matrice à coefficients complexes. Diagonaliser M.

   (c) En déduire M^n (qui doit être une matrice réelle).

8. **(**)** Soit A la matrice d'ordre $(1, n)$ dont tous les les éléments sont égaux à $a \in \mathbb{C}$, et B la matrice d'ordre $(n, 1)$ dont tous les les éléments sont égaux à $b \in \mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres de AB et les sous-espaces propres associés.

9. **(**)** Soient $x_1, x_2, .., x_n$ des réels non tous nuls. Déterminer le rang de la matrice $M = (x_i x_j)_{i,j=1,2,..,n}$. Déterminer le polynôme caractéristique de M. Est-ce une matrice diagonalisable?

10. **(**)** Soient a, b deux nombres complexes. Soit $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,2,..,n}$ la matrice d'ordre n telle que $a_{ii} = a$ pour $i = 1, 2, .., n$ et $a_{ij} = b$ lorsque $i \neq j$. Pour $n = 3$, déterminer les valeurs et vecteurs propres de A_n. Est-ce une matrice diagonalisable? Mêmes questions pour n quelconque.

11. **(***)** Soit E l'ensemble des fonctions réelles indéfiniement dérivables sur $\mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme u tel que pour $f \in E$, $u(f) = f'' - 2f'$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de u. Faire la même chose en vous plaçant dans F ensemble des polynômes à coefficients réels.

12. **(***)** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & -4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

    Déterminer le polynôme caractéristique de u. Montrer que $u^3 = 0$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ où la matrice de u est:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. **(***)** Soit E l'espace vectoriel constitué des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère T l'application de E dans E tel que pour $f \in E$, $T(f) = F$ avec $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$. Montrer que T est un endomorphisme de E. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

14. **(***)** Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles et soit ϕ l'application de $\mathcal{L}(E)$ qui a une suite u de E associe la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés de ϕ.