TD UEF05 n^0 5 et 6

Intégrales généralisées

1. **(**)** Calculer les intégrales définies suivantes :
   - $A = \int_1^2 t^\alpha dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$
   - $B = \int_0^1 \frac{2}{t^2+t+2} dt$
   - $C = \int_{-2}^0 \sqrt{4-t^2} dt$

2. **(**)** Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

3. **(*)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
   - $A = \int_0^1 t dt$
   - $B = \int_0^1 \frac{2}{t-1} dt$
   - $C = \int_0^1 \ln(t) dt$
   - $D = \int_0^1 \exp(-\frac{2}{t}) dt$
   - $E = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t(1-t)}}$
   - $F = \int_0^1 \frac{t-1}{\sqrt{t^3-t^2}} dt$

4. **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
   - $A = \int_1^{+\infty} t dt$
   - $B = \int_1^{+\infty} \frac{3}{t(2t-1)} dt$
   - $C = \int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{t^2+t}} dt$
   - $D = \int_2^{+\infty} (\ln t)^{-t} dt$
   - $D = \int_1^{+\infty} \exp(-\sqrt{t}) dt$
   - $E = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{2t^3+3}} dt$
   - $F = \int_1^{+\infty} (1-\cos(\frac{1}{t})) dt$
   - $G = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$

5. **(*)** Après avoir montrer leur existence, calculer les intégrales suivantes:
   - $A = \int_2^{+\infty} \frac{t}{t^2-2t+1} dt$
   - $B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3|t|}{t^3} dt$
   - $C = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt$

6. **(**)** Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales suivantes:
   - $A = \int_0^{+\infty} \cos(t) dt$
   - $B = \int_0^{+\infty} \cos(e^{-t}) dt$
   - $C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t+1)}{t^2+1} dt$
   - $D = \int_0^{4\pi} \frac{1}{\sin t} dt$

7. **(**)** On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer pour quelles valeurs de n, I_n existe.
   (b) Calculer I_0 et I_1. Déterminer une relation de récurence entre I_{n+1} et I_n.
   (c) Montrer que I_n est une suite convergente dont on donnera la limite. La série $\sum I_n$ est-elle convergente?

8. **(***)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ (on pourra par exemple utiliser la comparaison avec une série). Réciproquement, si $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge-t-elle?