TD UEF03 n^0 3

Déterminants

1. (*) Soit $E = \mathbb{R}^3$ de base $e = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'application $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que:

$$M = Mat(u, e, e) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que u n'est pas bijective.

   (b) Déterminer le rang de M et en déduire $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

2. (*) Calculer

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (*) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & a+1 \\ 3 & 6 & a+2 \end{pmatrix},$$

   où $a \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de A et donner sa matrice inverse lorque celle-ci existe.

4. (*) Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 2a-2 \end{pmatrix}$. Suivant les valeurs de a donner le rang de A. Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$.

5. (**) Montrer que l'ensemble des matrices réelles inversibles d'ordre n n'est pas un espace vectoriel.

6. (**) Soit la matrice $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{i+1,i} = 1$, pour $i = 1, .., n-1$, $a_{i,i+1} = 1$, pour $i = 1, .., n-1$ et sinon $a_{ij} = 0$. On note Δ_n le déterminant de A_n.

   (a) Pour $n = 2$, écrire A_2 et calculer Δ_2.

   (b) Pour $n = 3$, écrire A_3 et calculer Δ_3.

   (c) Pour n quelconque, calculer Δ_n en cherchant une relation de récurrence.

7. (**) Déterminant de Vandermonde. Soit $A(\lambda_1,..,\lambda_n) = (a_{ij})$ matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \lambda_i^{j-1}$ pour $(i,j) \in \{1,2,..,n\}^2$, où les λ_i sont des réels distincts. Nous proposons deux méthodes pour démontrer la formule

$$(*) \qquad \det A(\lambda_1,..,\lambda_n) = \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

   (a) i. En manipulant les colonnes de la matrice $A(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$, montrer qu'elle a le même déterminant qu'une matrice dont la première ligne est $(1,0,0,0)$ et en déduire

$$\det A(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 \end{pmatrix}.$$

   ii. Généraliser le calcul précédent à $A(\lambda_1,..,\lambda_n)$ et en déduire $(*)$ par récurrence.

   (b) i. Montrer que $\det(A(\lambda_1,..,\lambda_{n-1},X))$ est un polynôme à coefficients réels de degré $n-1$.

   ii. Déterminer $n-1$ racines de $\det(A(\lambda_1,..,\lambda_{n-1},X))$, et en déduire une factorisation de ce polynôme.

   iii. En déduire $(*)$ par récurrence.

8. (**) Déterminer l'inverse (après avoir montré son existence) de la matrice $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i \le j$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

9. (***) Calculer le déterminant de $A = (a_{ij})$ matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = |i-j|$ pour $(i,j) \in \{1,2,..,n\}^2$.

10. (***) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 1$ si $j = i+1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Déterminer le rang de A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.