TD UEF05 n^0 2 et 3

Séries numériques

1. **(*)** Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants (étude sans connaissance prérequise) :
   - $a_n = (-1)^n \cos(\frac{n+1}{n})$ • $b_n = -2\exp(-\frac{1}{2}n)$ • $c_n = (-1)^n \left(\sin(\frac{2}{3n}) + \sin(\frac{2}{3n+3})\right)$.

2. **(*)** Étudier la convergence des séries de termes généraux positifs suivants:
   - $a_n = \left(\frac{1}{\ln(2n)}\right)^n$ • $b_n = \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln n}$ • $c_n = \exp(-n^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
   - $d_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n}$ avec $\alpha \in [0, \pi/2]$ • $e_n = [\ln(n^2+1)]^\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ • $f_n = \left(\cos(\frac{1}{n^\gamma})\right)^n$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

3. **(**)** Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants:
   - $a_n = \frac{2n-1}{n(n^2+4)}$ • $b_n = \ln(1 - \frac{1}{n+2})$ • $c_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
   - $d_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ • $e_n = \frac{\ln(n^3+1)}{3n^2+1}$ • $f_n = \int_0^{\pi/n} \sqrt{\sin x}dx$
   - $g_n = \frac{\sqrt{n}}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$ • $h_n = (1 - \cos\frac{\pi}{n})(ln(n))^7$ • $i_n = (n^3-3)\exp(-\sqrt{n})$.

4. **(**)** Étudier la convergence (en précisant absolue convergence, semi-convergence ou divergence) des séries de termes généraux suivants:
   - $a_n = \cos(\frac{\pi}{3}n)$ • $b_n = (-1)^n(\ln n)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ • $c_n = (-1)^n \frac{(ln(n))^2}{\sqrt{n}}$
   - $d_n = \frac{\cos(2n)}{3n^3+2}$ • $e_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{n^5+t^5}}$ • $f_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.

5. **(**)** On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \geq n_0$. Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge, puis que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

6. **(**)** On considère une suite réelle décroissante (a_n). Montrer que si la série $\sum a_n$ converge alors la suite (na_n) tend vers 0 (on étudiera la série de terme général $(n(a_n - a_{n+1}))$). Que peut-on dire de la réciproque?

7. **(**)** On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexes telle que $\sum |u_n|$ converge. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, soit $\sum_{k=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_i|^2 \sum_{k=1}^n |y_i|^2}$, montrer que pour $\alpha > 0.5$, la série de terme général $\frac{\sqrt{|u_n|}}{n^\alpha}$ converge. Si $\alpha = 0.5$, déterminer un contre-exemple.

8. **(***)** Étudier la convergence (en précisant absolue convergence, semi-convergence ou divergence) des séries de termes généraux suivants:
   - $a_n = \frac{1}{n}\sin(\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{n})$ • $b_n = \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} - 1$ avec $E(x)$ partie entière de x
   - $c_n = \cos(\sqrt{n^2+1}) - \cos n$ • $d_n = \frac{\ln(1-(-1)^n n^\alpha)}{n^\beta + (-1)^n}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.