TD UEF03 n^0 2

Matrices

1. **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ de base $e = (e_1, e_2)$. On considère l'application f telle que pour $x = x_1e_1 + x_2e_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f(x) = (x_1 + x_2)e_1 + (2x_2 - x_1)e_2$.
   (a) Déterminer la matrice de f dans e.
   (b) On pose $e'_1 = 2e_2 - e_1$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Montrer que $e' = (e'_1, e'_2)$ est une base de E.
   (c) Déterminer les matrices $Mat(f, e, e')$ et $Mat(f, e', e)$, puis la matrice de f dans e'.

2. **(**)** On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
   (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $f(x, y, z) = (2y + z, x + 2y, -x + z)$. Donner A, la matrice de f dans la base e.
   (b) Soit g, la projection parallèlement à l'axe (Oz) sur le plan d'équation $x = z$
   et h, la symétrie autour de la droite vérifiant les équations $x = -z$ et $y = 0$.
   Donner (toujours dans la base e) B, la matrice de g, et C, la matrice de h.
   (c) Calculer AB, AC et $ABAC$.
   (d) En déduire $f(g(e_1))$, $f(g(f(h(e_1))))$ et $f(g(f(h(1, -2, 1))))$.
   (e) Calculer $g(f(h(f(1, -2, 1))))$.

3. **(*)** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application u qui à un polynôme de E associe la somme des coefficients de ce polynôme.
   (a) Montrer que u est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$, dont vous préciserez F.
   (b) Indiquer une base e de E et une base f de F. Donner la matrice $Mat(u, e, f)$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de u.

4. **(*)** Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. On pose $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (0, 0, 2)$, ainsi que $v_1 = (1, 3)$ et $v_2 = (1, 2)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) (resp. (v_1, v_2)) forme une base de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Donner la matrice de f relativement à ces deux bases.

5. **(*)** On désigne par $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ les matrices carrées 2×2 réelles. Soit
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
qui est la matrice de $\left\{ \begin{array}{ccc} & f & \\ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ dans la base canonique $((1, 0), (0, 1))$ avec l'écriture conventionnelle de X en colonne.
   (a) Donner le noyau, l'image et le rang de f.
   (b) Donner le noyau, l'image et le rang de $\left\{ \begin{array}{ccc} & g & \\ \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$.
   (c) Choisir une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et y écrire la matrice de g.

6. **(*)** Soit $\mathcal{P}$ la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace des polynômes de degré 2 à coefficients réels, $\mathcal{E}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère les applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & g & \\ \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b,c,d) & \mapsto & (a+b+c+d, c) \end{array}.$$

Ecrire A, la matrice de f avec les bases $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}_4$, et B, la matrice de g avec les bases $\mathcal{E}_4$ et $\mathcal{E}_2$. Calculer ensuite BA.

7. **(**)** Soit E l'espace vectoriel constitué des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble G des fonctions g de E s'écrivant sous la forme $g(x) = (ax+b)e^x + (cx+d)e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec a, b, c et d des réels.

   (a) Montrer que G est un sous espace vectoriel de E. Montrer que $g_1(x) = e^x$ et $g_2(x) = e^{-x}$ forme une famille libre de G. Montrer que $g_3(x) = xe^x$ et $g_4(x) = xe^{-x}$ forme une famille libre de G. En déduire une base de G, ainsi que la dimension de G.

   (b) Montrer que $g_3'(x)$ et $g_4'(x)$ appartiennent à G. Montrer que $b' = (g_3, g_4, g_3', g_4')$ forme une base de G. Donner la matrice de passage de $b = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ dans b'. Donner les coordonnées de $h(x) = (3x-4)e^x$ dans b'.

   (c) On considère l'application u de G dans E telle que pour $g \in G$, on ait $u(g) = g'$. Déterminer les images par u de g_1, g_2, g_3, g_4. Montrer que u est une application linéaire de G dans G, dont on donnera la matrice A dans (g_1, g_2, g_3, g_4). En déduire sa matrice dans b'.

   (d) Calculer A^n. En déduire la dérivée 100 ième de h.

8. **(**)** Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace (Tr désigne la trace de la matrice).

9. **(**)** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calculer $A - I$, $(A-I)^2$, $(A-I)^3$ et $(A-I)^4$.

   (b) En déduire A^n.

10. **(***)** Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2.

   (a) Montrer que E est un espace vectoriel. Déterminer une base e de E. En déduire la dimension de E.

   (b) Soit l'application T telle que pour $M \in E$, on ait $T(M) = {}^tM$. Montrer que T est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans e.

   (c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, une matrice non nulle de E. Soit C l'application telle que $C(M) = A.M - M.A$ pour $M \in E$. Montrer que C est un endomorphisme de E et déterminer les images des vecteurs de e par C. En déduire la matrice de C dans e, puis $\ker(C)$ et $\mathrm{Im}(C)$.

11. **(***)** Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker u = \mathrm{Im} u$ si et seulement si n est pair. Caractériser ensuite les endomorphismes u vérifiant cette condition. Trouver une matrice simple représentant de tels endomorphismes dans une base convenable.