TD UEF05 n^0 1

Suites numériques

1. **(*)** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
   (a) On suppose que $u_0 = 1$. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_n + a$. Déterminer a de telle manière que (v_n) soit une suite géométrique. Quelle est sa raison?
   (c) Pour $u_0 \in \mathbb{R}$, en déduire une écriture de u_n en fonction de n, ainsi que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. **(*)** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $u_0 = 1$.
   (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   (b) Montrer que (u_n) est décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est bornée. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. **(**)** Écrire en fonction de n et de u_0 et $u_1 \in \mathbb{R}$, la suite (u_n) telle que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Quand peut-elle être convergente?

4. **(**)** Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de (u_n). On suppose que (u_n) converge; montrer qu'alors (v_n) converge. La réciproque est-elle vraie? (contre-exemple...)

5. **(**)** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sin(\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{n})$.
   (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   (b) Montrer que (u_n) ne converge pas. A-t-elle des valeurs d'adhérence?
   (c) Mêmes questions pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $v_n = nu_n$.

6. **(**)** Faire l'étude, suivant les valeurs de $u_0 \in \mathbb{R}$ de la suite (u_n) telle que $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

7. **(**)** Faire l'étude, suivant les valeurs de $u_0 \in \mathbb{R}$ de la suite (u_n) telle que $u_{n+1} = \frac{-4}{5 + u_n}$. Écrire u_n en fonction de n, en utilisant la suite $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}$.

8. **(***)** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{a(1+a^2)}{1+x^2}$ où $a > 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Suivant les valeurs de a et de u_0, étudier le comportement asymptotique de cette suite.

9. **(***)** Montrer que si la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$, alors la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers l.

10. **(***)** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n!}$ et $u_0 = 1$.
    (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Donner une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
    (b) Montrer que (u_n) est croissante.

(c) En utilisant le fait que $\dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $k \geq 1$, montrer que (u_n) est une suite de Cauchy (on regardera $u_{n+p} - u_n$). En déduire que (u_n) est convergente.

(d) Supposer que la limite de (u_n) est un rationnel sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers premiers entre eux. En regardant $|\dfrac{a}{b} - u_n|$, montrer que l'on arrive à une contradiction. Conclure.