TD UEF03 n^0 1

Espaces vectoriels - Applications linéaires

1. **(*)** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. Soient u et v deux vecteurs de E. Déterminer (avec justification) si les ensembles suivants sont des s.e.v. de E :
   - $F_1 = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - $F_2 = \{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$.
   - $F_3 = \{\lambda u - 2\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$.
   - $F_4 = \{x \in E, x = \lambda u \text{ ou } x = \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - $F_5 = F_1 + E$.
2. **(**)** Montrer que l'intersection de sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel. Que peut-on dire de leur réunion? (penser à des exemples).
3. **(**)** Soit E l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble C des fonctions de E croissantes est-il un e.v.? Même question pour le sous-ensemble M des fonctions de E monotones, puis P sous-ensemble des fonctions de E paires? Que peut-on dire de $M \cap P$? Donner un exemple de s.e.v. de P de dimension 1, puis 2, puis n où $n \in \mathbb{N}$.
4. **(**)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-e.v. constitué des polynômes à coefficients réels.
   (a) La fonction $\log(x)$ appartient-elle à E ? Et la fonction $\sin(x)$ (penser à dériver)?
   (b) Montrer que E_n, ensemble des polynômes de E de degré inférieur ou égal à n, est un s.e.v. de E.
   (c) Montrer que l'ensemble des polynômes de E de degré exactement égal à 1 n'est pas un s.e.v. de E.
5. **(*)** Soit E l'e.v. constitué des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, dont une base est (i, j). Montrer que les vecteurs de coordonnées $(1, 2)$ et $(1, -2)$ forment une base de E. En est-il de même pour les vecteurs $(3, 0)$ et $(-1, 0)$?
6. **(*)** Soit E un e.v. de base (e_1, e_2). Montrer que $(e_1 + e_2, e_2)$ est aussi une base de E.
7. **(**)** Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ dont $e = (i, j, k)$ est la base canonique. Soient les vecteurs $u_1(0, 1, 2)$, $u_2(-1, 4, 6)$, $u_3(-2, 9, 14)$ et $u_4(0, 0, -2)$.
   - La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une famille génératrice de E? Et (u_1, u_2, u_3, u_4)?
   - Montrer que $b = (u_1, u_2, u_4)$ est une base de E. Soit $u(x, y, z)$ un vecteur de E avec $x, y, z \in \mathbb{R}$. Déterminer les coordonnées de u dans b. Donner les coordonnées de u_3 puis de u_2 dans b.
8. **(**)** Soit E l'e.v. constitué des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dont une base est (e_1, e_2, e_3). On considère les vecteurs $u_1(0, 3, -1)$, $u_2(0, -4, 0)$, $u_3(1, 0, 2)$, $u_4(2, -3, 5)$.
   (a) u_4 est-il une combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3?
   (b) Montrer que u_1, u_2 et u_4 sont liés. Déterminer une base du s.e.v. engendré par ses trois vecteurs.
   (c) Montrer que les quatre vecteurs engendrent E.
   (d) Soit F_1 le s.e.v. engendré par u_1 et u_2 et F_2 le s.e.v. engendré par u_3 et u_4. Donner une base (et la dimension) de F_1, de F_2, de $F_1 \cap F_2$ et de $F_1 + F_2$.

9. **(**)** Soit l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles.
   (a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e.v. et préciser le vecteur nul de E.
   (b) Montrer que F, ensemble des suites arithmétiques, est un s.e.v. de E. Déterminer une base de F, et en déduire la dimension de F.
   (c) L'ensemble des suites de F telles que $u_3 = 0$ est-il un s.e.v. de F? Si oui, quelle est sa dimension?
   (d) Mêmes questions avec l'ensemble des suites de E convergeant vers 1.

10. **(**)** On veut calculer le terme général de la suite u telle que $u_0 = A$, $u_1 = B$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit F l'ensemble des suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-e.v..
    (b) Soient les suites a et b telles que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et $b_{n+2} = 2b_{n+1} + 3b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille (a, b) est libre. Déterminer le sous-espace qu'elle engendre et en déduire la dimension de F.
    (c) Soit $r \in \mathbb{R}$ et v la suite de terme général $v_n = r^n$. Pour quelles valeurs de r a-t-on $v \in F$?
    (d) Soient s et t les suites de termes généraux $s_n = 3^n$ et $t_n = (-1)^n$. Montrer que (s, t) est une base de F.
    (e) Si une suite $u \in F$ a pour coordonnées (A, B) dans la base (a, b), quelles sont ses coordonnées dans la base (s, t)?

11. **(**)** Soit un espace vectoriel E dont $(e_1, .., e_n)$ est une base. Montrer que l'ensemble F des vecteurs $(u_1, .., u_n)$ de E qui vérifient $u_1 + u_2 + .. + u_n = 0$ est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base f de F et en déduire la dimension de F. Montrer que E est la somme directe de F et d'un sous-espace vectoriel G que l'on déterminera.

12. **(*)** Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. On suppose que $g(1, 2) = (1, 2)$ et $g(2, 1) = (3, 6)$ (les coordonnées sont exprimées dans une base quelconque de $\mathbb{R}^2$). Déterminer le noyau et l'image de g ainsi que leurs dimensions. Calculer $g(123, -342)$.

13. **(*)** Trouver des exemples concrets de f_i, applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même, telle que $\dim(\ker(f_i)) = i$ pour $i = 0, 1, .., 4$. Étudier ensuite les dimensions du noyau et de l'image de l'application $f = (f_1)o(f_2 + f_3) - f_4$.

14. **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application f définie sur E tel que $f(P) = Q$ où $Q(X) = (1 - X^2)P''(X) - 2XP'(X)$.
    - Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
    - Déterminer le noyau et l'image de f ainsi que leurs dimensions.
    - Montrer que la famille $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base de E, avec $b_1(X) = 1$, $b_2(X) = X$, $b_3(X) = X(X - 1)$ et $b_4(X) = X(X - 1)(X - 2)$. Exprimer $f(b_i)$ pour $i = 1, .., 4$ dans la base b.

15. **(**)** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires de E ($E = E_1 \oplus E_2$). On considère l'application f telle que pour $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, on ait $f(x) = 2x_1 - 3x_2$.
    (a) Montrer que f est une application linéaire.
    (b) Déterminer $f o f$.
    (c) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. En déduire l'application réciproque f^{-1}.