Mesure et Intégration

Feuille n^o 4
Applications aux probabilités

1. **(*)** Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire : a/ gaussienne, b/ de Poisson, c/ exponentielle, d/ uniforme, e/ de Cauchy, f/ binomiale.

2. **(**)** Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{E}X^n = \int_0^\infty nt^{n-1}(1 - F_X(t))dt = \int_0^\infty nt^{n-1}P(X > t)dt.$$
Montrer que l'hypothèse X positive est nécessaire.

3. **(*)** Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X. Déterminer dans les 2 cas suivants l'espérance et la variance de X :
$$\begin{aligned} F_X(t) &= \frac{1}{2}\left(e^t \mathbb{I}_{]-\infty,0[}(t) + (2 - e^{-t})\mathbb{I}_{[0,\infty[}(t)\right) ; \\ F_X(t) &= \frac{1}{4}(t+2)\mathbb{I}_{[-1,0[\cup[1,2[}(t) + \frac{3}{4}\mathbb{I}_{[0,1]}(t) + \mathbb{I}_{[2,\infty[}(t). \end{aligned}$$

4. **(*)** Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite et soit Y une v.a. indépendante de X, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $P(Y = 1) = 0.5$. On considère la v.a. $Z = XY$. Déterminer la mesure de probabilité de Z, puis celle de $X + Z$. En déduire que la somme de 2 variables gaussiennes peut ne pas être gaussienne.

5. **(**)** Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite. Soit la v.a. $Y = e^X$. On dit que Y suit une loi log-normale.
   (a) Montrer que Y à une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{z}e^{-\ln^2(z)/2}$ si $z > 0$ et 0 sinon.
   (b) Pour $a \in [-1, 1]$, soit Y_a la v.a. de densité $f_a(y) = f_Y(y)(1 + a\sin(2\pi\ln(y)))$. Montrer que Y et Y_a ont mêmes moments, et en déduire que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité.

6. **(**)** On considère $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que X est absolument continue, c'est-à-dire que la mesure de probabilité de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer alors que la loi de X_1 admet une densité f_1 par rapport à la mesure de Lebegue λ_1 sur $\mathbb{R}$, que l'on exprimera en fonction de f.

(b) Calculer f_1 et f_2 pour f telle que :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_1} & \text{si } x_1 \geq x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A-t-on $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ pour λ_2-presque tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$? Quelle conclusion en tirer sur X_1 et X_2?

(c) On suppose maintenant que $X = (X_1, X_1)$ où X_1 est absolument continue par rapport à λ_1. Le vecteur aléatoire X est-il absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$?

7. **(**)** Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de loi exponentielle de paramètre 1.

   (a) Montrer que $P(\exists (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2, i \neq j, X_i = X_j) = 0$.

   (b) On pose $Z = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Déterminer la loi de Z.

   (c) Soit $N = \min\{1 \leq i \leq n, X_i = Z\}$. Montrer que N est une v.a. et établir que $P(N = K, Z > t) = \dfrac{e^{-nt}}{n}$ pour $k = 1, \cdots, n$ et $t > 0$. En déduire que Z et N sont des v. a. indépendantes et préciser la loi de N.

8. **(***)** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \geq 1$ on définit par récurrence $T_n = \inf\{k > T_{n-1}, X_k = 1\}$ et $T_0 = 0$.

   (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, T_n est une v.a.

   (b) Montrer que $(T_{i+1} - T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme une suite de v. a. indépendantes et identiquement distribuées.

   (c) Calculer la loi de T_1 et sa fonction caractéristique.

   (d) En déduire la loi de T_n.

9. **(**)** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

   (a) $((X_n)$ converge en probabilité vers $0) \Longleftrightarrow$ (la suite $(P(X_n > 0))$ tend vers 0).

   (b) $((X_n)$ converge presque-sûrement vers $0) \Longleftrightarrow$ (la série $\sum_{n \geq 1}^{\infty} P(X_n > 0) < \infty$).

   (c) On suppose que (X_n) suit une loi de Poisson de paramètre α_n. Etudier la convergence de la suite (X_n) dans $\mathbb{L}^1$ puis presque-sûrement dans les cas où $\alpha_n = 1/n$ et $\alpha_n = 1/n^2$.

10. **(**)** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. non corrélées et dans $\mathbb{L}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des réels m et C tels que pour tout n, $\mathbb{E}(X_n) = m$ et $\text{var}X_n \leq C$. Montrer que la suite des $\bar{X}_n$ converge vers m dans $\mathbb{L}^2$ et en probabilité.

11. **(***)** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d., dans $\mathbb{L}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $Y_k = \bar{X}_k$ pour $k \geq 1$. Peut-on obtenir la loi faible des grands nombres pour la suite (Y_k)? La loi forte des grands nombres? Un théorème de limite centrale? Faire ensuite le cas particulier où les X_k suivent une loi normale centrée réduite.