Mesure et Integration

Feuille n^o 3

Intégration de Lebesgue

1. **(*)** On considère des suites de fonctions (f_n) sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ou λ est la mesure de Lebesgue. Etudier pourquoi les théorèmes de Fatou et Lebesgue s'appliquent ou non :
$f_n = \frac{1}{n}\mathbb{I}_{[1,\infty[}$, $\quad f_n = n\mathbb{I}_{[1/n,2/n]}$, $\quad f_n = \frac{1}{n}\mathbb{I}_{[0,n]}$, $\quad f_n = n(-1)^n\mathbb{I}_{[n,n+1]}$.
2. **(*)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit f une fonction intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On suppose que $\int |f| d\mu = 0$. Démontrer que $f = 0$ μ -presque partout.
3. **(**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur Ω et μ-intégrables. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$ pour μ-presque tout x, que f_n tend μ-presque partout vers une fonction f μ-intégrable et que $\int f_n d\mu$ tend vers $\int f d\mu$ lorsque $n \to \infty$. Montrer alors que $\lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)^+ d\mu = 0$, puis que $\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$.
4. **(*)** Etudier l'existence et la limite (lorsque $n \to +\infty$) des intégrales suivantes:
   (a) $I_1(n) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \exp\left(\frac{x}{2}\right) dx$;
   (b) $I_2(n) = \int_0^1 \frac{1 + nx}{(1+x)^n} dx$;
   (c) $I_3(n) = \int_0^1 \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha} dx$ où $\alpha \in \mathbb{R}$;
   (d) $I_4(n) = n \int_{-1}^1 \frac{\sin(x/n)}{x\sqrt{1-x^2}} dx$;
   (e) $I_5(n) = n \int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{1 + x^n\sqrt{1-x^2}} dx$;
5. **(**)** On considère $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue sera sous-entendu par la suite).
   (a) Montrer que si $f_1, f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables, alors $\max(f_1, f_2)$ est aussi une fonction intégrable.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{1/n} \leq \max(1, f)$. En déduire que $f^{1/n}$ est intégrable.
   (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $n|x^{1/n} - 1| \leq |\log x|$ si $x \in]0,1[$ et $n|x^{1/n} - 1| \leq x - 1$ si $x \geq 1$.
   (d) On suppose en plus que $\log f$ est intégrable. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \left(f(t)^{1/n} - 1\right) dt = \int_0^1 \log f(t) dt.$$

(e) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(t)^{1/n}dt\right)^n = \exp\int_0^1 \log f(t)dt$.

6. **(**)** Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \dfrac{n}{\log n}\mathbb{I}_{[0,1/n]}(x)$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ f_n est mesurable et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que lorsque $n \to +\infty$, $f_n \to 0$ λ presque partout et $\int f_n d\lambda \to 0$.

   (c) On veut montrer qu'il n'existe pas de fonction g λ-intégrable telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ λ presque partout. Pour cela, par l'absurde, on suppose qu'une telle fonction existe. Montrer alors que $\int_0^{1/2} g(x)dx \geq \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\log n}$. En déduire $\int g d\lambda$ et conclure.

7. **(***)** On considère la fonction F définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{6}\left(xE(x)\mathbb{I}_{[0,3[}(x) + 6\mathbb{I}_{[3,+\infty[}(x)\right).$$

   (a) Après l'avoir tracée, montrer que F est une fonction de répartition.

   (b) On considère la mesure de probabilité P définie par F. Déterminer les $x_i \in \mathbb{R}$ tels que $P(\{x_i\}) > 0$.

   (c) Déterminer, lorsqu'elles existent les intégrales suivantes :
   $J_1 = \int_{]0,\infty]}\dfrac{dP(x)}{x}$, $\quad J_2 = \int_{]1,\infty]}\dfrac{dP(x)}{x-1}$, $\quad J_3 = \int_{\mathbb{R}}\dfrac{dP(x)}{x-2}$, $\quad J_4 = \int_{\mathbb{R}}\phi(x)dP(x)$,
   avec $\phi(x) = \log|x-1|$ si $x \neq 1$ et $\phi(1) = 1$.