# Mesure et Intégration

## Feuille $n^o$ 2

## Mesures et fonctions mesurables

1. **(*)** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un ensemble mesurable avec $\Omega$ un ensemble fini. On définit $\mu$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. Montrer que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ est un espace probabilisé.

2. **(*)** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un ensemble mesurable avec $\Omega$ un ensemble fini. L'application $\nu$ sur $(\Omega \times \Omega, \mathcal{P}(\Omega) \otimes \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour $A = (A_1, A_2) \in \mathcal{P}(\Omega) \otimes \mathcal{P}(\Omega)$ on ait $\nu(A) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2)$ est-elle une mesure ? Et si $\nu(A) = \text{card}(A_1)$ ? Et si $\nu(A) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_2)$ ?

3. **(**)** On se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer les $\liminf$ et $\limsup$ des familles d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants:
   - $A_{2n} = \{0, 1\}$ et $A_{2n+1} = \{1, 2\}$;
   - $A_{2n} = [-2n; 0[$ et $A_{2n+1} = [\dfrac{1}{2n+1}; 2n+1]$;
   - $A_n = [\dfrac{(-1]^n}{n+1}; n[$;
   - $A_n = [r(n), +\infty[$ où $r$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$

4. **(**)** On considère l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ et on définit la fonction numérique $F$ telle que pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mu(]-\infty, x])$.
   (a) Montrer que $F$ est croissante, et que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ .
   (b) Montrer que $F$ admet des limites à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}$, puis que $F$ est continue à droite sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $F(b) - F(a) = \mu(]a, b])$ et $F(a) - F(a^-) = \mu(a)$ pour $-\infty < a < b$ ($F(a^-)$ est la limite à gauche de $F$ en $a$).
   (d) Soit $D$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où $F$ est discontinue, et soit $D_n = \left\{ t \in \mathbb{R}, \mu(t) \geq \dfrac{1}{n} \right\}$. Montrer que $D = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ et en déduire que $D$ est $\lambda$-négligeable où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. $D$ est-il $\mu$-négligeable?

5. **(*)** Sur $\mathbb{Z}$, on définit la tribu $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{Z}, \text{pour tout } n \geq 0, (2n \in A) \Longleftrightarrow (2n+1 \in A)\}$. Montrer que l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\omega \mapsto \omega + 2$ est une fonction $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$-mesurable. Montrer que c'est une bijection, et que son inverse n'est pas mesurable.

6. **(*)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$. Décrire $f^{-1}(\mathcal{A})$.

7. **(*)** Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telles que $(x \in \Gamma) \Longleftrightarrow (-x \in \Gamma)$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est l'image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par l'application $f(x) = |x|$. Les applications $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = \cos(x)$ sont-elles $\mathcal{S}$-mesurables?

8. **(*)** Montrer que les fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont boréliennes.

9. **(**)** Soit $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Déterminer l'ensemble des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables, lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, puis lorsque $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.

   (b) Soit $(A_n)_{n\in I}$ une partition de $\Omega$, avec $I \subset \mathbb{N}$. On suppose que $f$ est $\sigma((A_n)_{n\in\mathbb{N}})$-mesurable. Montrer qu'alors $f$ est constante sur chaque $A_n$ et donner la forme générale d'une telle application mesurable lorsque $I = \{1\}$, puis $I = \{1, 2\}$ et enfin $I = \mathbb{N}$.

10. **(**)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prouver que $\sup X_n$, $\inf X_n$, puis que $\limsup X_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup\limits_{m\geq n} X_m\right)$ et $\liminf X_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{m\geq n} X_m\right)$, sont des variables aléatoires. Montrer enfin que $\{\omega \in \Omega, \lim X_n(\omega) \text{ existe}\}$ est mesurable.

11. **(**)** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

    (a) Soit $A \subset X$ et soit $\mathcal{T}_A = \{E \cap A, E \in \mathcal{T}\}$. Vérifier que $\mathcal{T}_A$ est une tribu sur $A$ (dite tribu induite par $\mathcal{T}$ sur $A$).

    (b) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne associée à $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $X$ telle que $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que ($f$ est $\mathcal{T}-$mesurable) $\Longleftrightarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{|A_n}$ est $\mathcal{T}_{A_n} -$ mesurable).

    (c) Application: montrer que la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$, est borélienne.

12. **(**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espace mesurable, et soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires $\Omega \to \Omega'$. On suppose que $X = Y$ $\mu$-presque partout. Montrer alors que $X$ et $Y$ ont même loi de probabilité (on pourra démontrer que pour tout $A' \in \mathcal{A}'$, on a $\mu(X^{-1}(A') \setminus Y^{-1}(A')) = 0$).