Mesure et Integration

Feuille n^o 2

Tribus, mesures et fonctions mesurables

1. (*) Sur $\mathbb{Z}$, on définit la tribu $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{Z}, \text{pour tout } n \geq 0, (2n \in A) \iff (2n+1 \in A)\}$. Montrer que l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\omega \mapsto \omega + 2$ est une fonction $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$-mesurable. Montrer que c'est une bijection, et que son inverse n'est pas mesurable.

2. (*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$. Décrire $f^{-1}(\mathcal{A})$.

3. (*) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telles que $(x \in \Gamma) \iff (-x \in \Gamma)$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est l'image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par l'application $f(x) = |x|$. Les applications $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = \cos(x)$ sont-elles $\mathcal{S}$-mesurables?

4. (*) Montrer que les fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont boréliennes.

5. (**) Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

   (a) Déterminer l'ensemble des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables, lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, puis lorsque $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.

   (b) Soit $(A_n)_{n \in I}$ une partition de Ω, avec $I \subset \mathbb{N}$. On suppose que f est $\sigma((A_n)_{n \in \mathbb{N}})$-mesurable. Montrer qu'alors f est constante sur chaque A_n et donner la forme générale d'une telle application mesurable lorsque $I = \{1\}$, puis $I = \{1, 2\}$ et enfin $I = \mathbb{N}$.

6. (**) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prouver que $\sup X_n$, $\inf X_n$, puis que $\limsup X_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} X_m \right)$ et $\liminf X_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{m \geq n} X_m \right)$, sont des variables aléatoires. Montrer enfin que $\{\omega \in \Omega, \lim X_n(\omega) \text{ existe}\}$ est mesurable.

7. (**) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

   (a) Soit $A \subset X$ et soit $\mathcal{T}_A = \{E \cap A, E \in \mathcal{T}\}$. Vérifier que $\mathcal{T}_A$ est une tribu sur A (dite tribu induite par $\mathcal{T}$ sur A).

   (b) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne associée à $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles de X telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrer que ($f$ est $\mathcal{T}-$ mesurable) $\iff$ ($\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{|A_n}$ est $\mathcal{T}_{A_n}-$ mesurable).

   (c) Application: montrer que la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$, est borélienne.

8. (**) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espace mesurable, et soit X et Y deux variables aléatoires $\Omega \to \Omega'$. On suppose que $X = Y$ μ-presque partout. Montrer alors que X et Y ont même loi de probabilité (on pourra démontrer que pour tout $A' \in \mathcal{A}'$, on a $\mu(X^{-1}(A') \setminus Y^{-1}(A')) = 0$).