Mesure et Intégration

Feuille n^o 1

Tribus

1. **(*)** Soit Ω un ensemble fini. Montrer que toute algèbre sur Ω est aussi une tribu sur Ω.
2. **(*)** Soit Ω un ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.
3. **(*)** Décrire l'algèbre et la tribu des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ engendrées par tous les singletons de $\mathbb{N}$ (les sous-ensembles contenant un seul point), puis par les singletons pairs de $\mathbb{N}$.
4. **(*)** Décrire la tribu des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ engendrée par les demi-droites de la forme $]n, +\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. **(**)** Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles A de $\mathbb{Z}$, tels que si pour $n \in \mathbb{Z}$, $2n \in A$ alors $2n+3$ appartient aussi à A. $\mathcal{A}$ est-il une algèbre sur $\mathbb{Z}$? une tribu sur $\mathbb{Z}$?
6. **(**)** Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par $\mathcal{B}_n$ la tribu sur $[0,1[$ engendrée par les intervalles
$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\qquad (0 \leq k \leq 2^n - 1).$$
   (a) Décrire les éléments de $\mathcal{B}_n$ et calculer le cardinal de $\mathcal{B}_n$.
   (b) Montrer que la tribu engendrée par la réunion de toutes les tribus $\mathcal{B}_n$ pour $n \geq 1$ n'est autre que la tribu $\mathcal{B}([0,1[)$ des ensembles boréliens de $[0,1[$.
7. **(**)** Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ est-elle une tribu sur $\Omega \times \Omega$?
8. **(***)** Décrire $\mathcal{C}$ l'algèbre des parties de $\mathbb{R}$ engendrée par les ensembles $A_{a,b} = [-b, -a[\cup]a, b]$ avec $0 < a < b$. A-t-on $[1,2] \in \mathcal{C}$? Soit $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. A-t-on $[1,2] \in \mathcal{C}$? (indication: considérer la tribu engendrée par les ensembles de la forme $A \cup (-A)$ où A borélien de $\mathbb{R}_+$ et $(-A) = \{-x, x \in A\}$).