Mesure et Integration

Feuille n^o 1

Tribus, mesures et fonctions mesurables

1. **(*)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesur et soit $B \in \mathcal{A}$, où $B \neq \emptyset$. Soit ν l'application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \mu(A \cap B)$. Montrer que ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Si $\mu(\Omega) = 1$, comment appelle-t-on ν?

2. **(*)** On se place dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que l'application $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto [0, +\infty]$ telle que pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu(A) = \sum\limits_{k \in A} 2^{-k}$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

3. **(**)** On se place dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dterminer les $\liminf$ et $\limsup$ des familles d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants:
   - $A_{2n} = \{0, 1\}$ et $A_{2n+1} = \{1, 2\}$;
   - $A_{2n} = [-2n; 0[$ et $A_{2n+1} = [\dfrac{1}{2n+1}; 2n+1]$;
   - $A_n = [\dfrac{(-1]^n}{n+1}; n[$;
   - $A_n = [r(n), +\infty[$ où r est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$

4. **(**)** On considre l'espace probabilis $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ et on dfinit la fonction numrique F telle que pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mu(]-\infty, x])$.
   (a) Montrer que F est croissante, et que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
   (b) Montrer que F admet des limites gauche et droite en tout point de $\mathbb{R}$, puis que F est continue droite sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $F(b) - F(a) = \mu(]a, b])$ et $F(a) - F(a^-) = \mu(a)$ pour $-\infty < a < b$ ($F(a^-)$ est la limite gauche de F en a).
   (d) Soit D l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où F est discontinue, et soit $D_n = \{t \in \mathbb{R}, \mu(t) \geq \dfrac{1}{n}\}$. Montrer que $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ et en dduire que D est λ-ngligeable où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. D est-il μ-ngligeable?

5. **(***)** Dcrire $\mathcal{C}$ l'algbre des parties de $\mathbb{R}$ engendre par les ensembles $A_{a,b} = [-b, -a[\cup]a, b]$ avec $0 < a < b$. A-t-on $[1, 2] \in \mathcal{C}$? Soit $\mathcal{A}$ la tribu engendre par $\mathcal{C}$. A-t-on $[1, 2] \in \mathcal{C}$? (indication: considrer la tribu engendre par les ensembles de la forme $A \cup (-A)$ où A borlien de $\mathbb{R}_+$ et $(-A) = \{-x, x \in A\}$).