MIMM7 - Séries Chronologiques

Exercices d'applications (fin)

1. (*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une série chronologique stationaire d'espérance m et de covariance $r(.)$. Montrer que le meilleur prédicteur au sens des moindres carrés de X_{n+h} de la forme aX_n+b s'obtient avec $a = r(h)$ et $b = m(1 - r(h)$.

2. (**) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série chronologique stationaire défini par
$$X_n = \varepsilon_n - \theta\varepsilon_{n-1}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z},$$
avec $|\theta| < 1$ et (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Montrer que le meilleur prédicteur linéaire $\widehat{X}_{n+1}$ au sens des moindres carrés de X_{n+1} à partir de $\{X_{n-j}, j \in \mathbb{N}\}$ est :
$$\widehat{X}_{n+1} = -\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j X_{n+1-j}.$$
Calculer l'erreur quadratique moyenne de ce prédicteur.

3. (**) Dans le modèle de l'exercice précédent, on suppose que X_1, X_2, X_4 et X_5 sont connus, mais pas X_3. Déterminer le meilleur prédicteur linéaire $\widehat{X}_3$ au sens des moindres carrés de X_3 à partir de (X_1, X_2), puis à partir de (X_4, X_5) et enfin à partir de (X_1, X_2, X_4, X_5). Calculer à chaque fois l'erreur quadratique moyenne de ce prédicteur.

4. (**) Répondre aux mêmes questions dans le cas du modèle
$$X_n = \phi X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z},$$
où $\phi \in \mathbb{R}$ et (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

5. (*) Soit (ε_n) un bruit blanc de variance 1. On considère les processus X et Y, où:
$$X_n = 0.7X_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad Y_n = -0.7Y_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$
Quels sont ces processus? Déterminer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de ces processus. Que se passe-t-il si on rajoute la condition $X_0 = 0$?

6. (**) Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère les processus X et Y, où:
$$X_n = A\cos(\pi n/3) + B\sin(\pi n/3) + Y_n \quad \text{et} \quad Y_n = \varepsilon_n + 2.5\varepsilon_{n-1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$
où A et B sont deux variables normales centrées réduites indépendantes et indépendantes des ε_n.
   (a) Quel type de processus est Y? Tracer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de Y. Déterminer la loi de Y_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) X a-t-il une tendance? une saisonnalité?

(c) Montrer que X est stationnaire et déterminer sa densité spectrale et son corrélogramme.

(d) Déterminer la loi de X_n pour $n \in \mathbb{N}$.

7. **(*)** Soit (ε_n) un bruit blanc de variance 1. On considère les processus X et Y, où:

$$X_n = X_{n-3} + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad Y_n = 0.999 Y_{n-3} + \varepsilon_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Quel type de processus est Y? Tracer la densité spectrale et le corrélogramme (théorique) de Y.

(b) Montrer que X n'est pas stationnaire. Calculer $\rho(n) = \mathbb{E} X_0 X_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et tracer $\rho(n)$ en fonction de n. Que remarque-t-on?

(c) Déterminer un filtre rendant X stationnaire (et non nul). Appliquer ce filtre à Y et déterminer la densité spectrale du processus filtré.

8. **(***)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère le processus X, où:

$$X_n = X_{n-1} - 0.16 X_{n-2} + \varepsilon_n - 0.2 \varepsilon_{n-1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}$$

(a) Quel type de processus est X? Tracer sa densité spectrale.

(b) Déterminer les équations de Yule-Walker et en déduire l'expression du corrélogramme (théorique) de X.

(c) On suppose connu le corrélogramme empirique de X. En déduire un estimateur de σ^2.

9. **(*)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

(a) Déterminer la densité spectrale et la fonction de covariance de ε (soit $r(k) = \mathbb{E} \varepsilon_0 \varepsilon_k$ pour $k \in \mathbb{N}$).

(b) Calculer la log-vraisemblance exacte (c'est-à-dire $\log f_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}(x_1,..,x_n)$) en fonction de σ^2. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de σ^2 par maximum de vraisemblance?

(c) Écrire le contraste de Whittle pour le paramètre σ^2. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de σ^2 par minimum de contraste? Comparer avec l'expression précédente.

10. **(**)** Soit (ε_n) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère le processus X, où:

$$X_n = \varepsilon_n - \theta \varepsilon_{n-1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

où $\theta \in]-1, 1[$.

(a) Quel type de processus est X? Déterminer sa densité spectrale et sa fonction de covariance (soit $r(k) = \mathbb{E} X_0 X_k$ pour $k \in \mathbb{N}$).

(b) Calculer la log-vraisemblance exacte (c'est-à-dire $\log f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,..,x_n)$) en fonction de σ^2 et θ (on écrira matriciellement cette expression). On notera $R(n)$ la matrice d'ordre n: $(r(j-i))_{1 \leq i,j \leq n}$. Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de (σ^2, θ) par maximum de vraisemblance?

(c) Écrire le contraste de Whittle pour les paramètres (σ^2, θ). Peut-on obtenir une expression simple de l'estimateur de (σ^2, θ) par minimum de contraste?

(d) Répondre au deux questions précédentes en supposant $\theta = 0.5$ connu (le paramètre à estimer est alors seulement σ^2).