MIMM7 - Séries Chronologiques

Exercices d'applications

1. **(*)** Soit (ε_t) un bruit blanc. Déterminer si les processus suivants sont 1/ centrés, 2/ stationnaires, 3/ des bruits blancs, avec

$$X_t = (t+1)\varepsilon_t, \quad Y_t = 3\varepsilon_{2t}, \quad Z_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t+1}.$$

2. **(*)** Soit (ε_t) et (ε'_t) deux bruits blancs indépendants. $(\varepsilon_t + \varepsilon'_t)$ est-il un bruit blanc?

3. **(*)** Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ une série chronologique telle que X_0 est une variable uniforme sur $[-1, 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$. X est-elle stationnaire? A accroissements stationnaires? Les X_i sont-elles indépendantes? Calculer les fonctions espérance et covariance de X.

4. **(*)** Soit (ε_t) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = 0$. On considère $X_t = f(\varepsilon_t)$. (X_t) est-elle centrée? stationnaire? gaussienne?

5. **(*)** On suppose que la série chronologique (X_t) est telle que $Y_t = X_{t+2} - X_t$ soit stationnaire. (X_t) est-elle stationnaire? Réciproquement, si (X_t) est stationnaire, montrer que (Y_t) est stationnaire.

6. **(**)** Soit la série chronologique $(B_H(t), t \in \mathbb{N})$ telle que $B_H(t)$ est centré (de plus $B_H(0) = 0$ presque sûrement), gaussien, vérifiant pour tout $(s, t) \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(B_H(t+s) - B_H(t))^2 = |s|^{2H} \quad \text{où} \quad H \in]0, 1[.$$

   (a) En déduire la loi de $B_H(t)$.
   (b) Déterminer la covariance de $B_H(t)$ (considérer à part le cas $H = 0.5$).
   (c) On note $N_H(t) = B_H(t+1) - B_H(t)$. Montrer que (N_H) est une série chronologique gaussienne stationnaire et donner la loi de probabilité de $N_H(t)$.
   (d) Déterminer la covariance $r_H(k)$ de (N_H). Que peut-on dire lorsque $H = 0.5$?
   (e) Montrer que $\sum |r(k)| = +\infty$ pour $H > 0.5$.

7. **(**) [Premier exercice du partiel 1999-2000]** On considère la série chronologique $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que:

$$X_k = \left(\cos(\frac{\pi}{2}k) + \varepsilon_k\right)^2 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

avec $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

   (a) Écrire X sous la forme $X_k = a(k) + s(k) + u_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, où
      - $a(.)$ est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ appelée tendance de X.

- $s(.)$ est une fonction périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ de période T à déterminer vérifiant $\sum_{j=1}^{T} s(j) = 0$ et appelée saisonnalité de X.
- $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires centrées.

(b) X est-elle une série chronologique stationnaire?

(c) Calculer la variance de X_k pour $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Déterminer un filtre linéaire non nul rendant la série chronologique X sans tendance ni saisonnalité. Si Y est la série filtrée, Y est-elle un bruit blanc?

8. **(**)** On suppose que la série $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ est de la forme $X_t = P(t) + \varepsilon_t$ avec P un polynôme de degré 1 et ε un bruit blanc gaussien de variance σ^2 inconnue. On suppose connu $(X_1, \cdots, X_N)$. Déterminer l'expression exacte de l'estimation de P par moindres carrés. Quelle est sa vitesse de convergence?

9. **(***)** On suppose que la série $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ est de la forme $X_t = s(t) + \varepsilon_t$ avec s une fonction de période 2 et ε un bruit blanc gaussien de variance σ^2 inconnue. On suppose connu $(X_1, \cdots, X_{2N})$.

   (a) Montrer que la variance empirique de X est un estimateur convergent vers la σ^2. Calculer sa vitesse de convergence.

   (b) Déterminer l'expression exacte de l'estimation de s par une régression par moindres carrés. Quelle est la vitesse de convergence?

   (c) Déterminer alors une estimation de σ à partir de la série à laquelle on a retiré l'estimation de s. Quelle est alors la vitesse de convergence?

10. **(**)** Soit (ε_t) un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère $X_t = (3t+\varepsilon_t)^2 + (-1)^t$ pour $t \in \mathbb{N}$.

    (a) Calculer $\mathbb{E}X_t$. En déduire la tendance et la saisonnalité (et la période) de X_t.

    (b) Calculer $\mathrm{var}X_t$.

    (c) On considère la série détendancialisée et désaisonnalisée. Est-elle stationnaire?

11. **(**)** On considère la série (X_t), où $X_t = P(t) + s(t) + \varepsilon_t$ avec $P(t)$ un polynôme de degré 3, $s(t)$ une fonction périodique de période 4, telle que $s(1) + s(2) + s(3) + s(4) = 0$, et (ε_t) est un bruit banc gaussien de variance σ^2.

    (a) Déterminer un filtre linéaire éliminant la tendance, puis un filtre linéaire éliminant la saisonnalité.

    (b) Quel est le filtre composé de ces deux filtres?

    (c) Déterminer la loi de la série filtrée. Est-ce un bruit blanc?