Université Paul Sabatier
DEUG Siences

Année Universitaire 1998/1999
Deuxième Semestre

EXAMEN TERMINAL

Module SMA08

Devoir de 4 heures. Tout document est interdit.
La seule calculatrice autorisée est celle de l'Université.

Épreuve d'ANALYSE

Durée conseillée: 1 h 15

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

1. Montrer que I existe.
2. Donner le développement en série entière de $\ln(1+x)$ et en déduire celui de f telle que $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$. Quel est le rayon de convergence de cette série? Montrer que cette série est uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. En utilisant le théorème d'intégration des séries entière, montrer que $I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. En déduire une valeur approchée (que vous calculerez) de I à 0.05 près.
4. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 2π, paire, telle que pour $t \in [0, \pi[$, $g(t) = t(2\pi - t)$. Représenter g. Calculer les coefficients de Fourier de g (intégration par parties...). Donner, en le justifiant, le développement en série de Fourier de g. En déduire, en choisissant une valeur particulière de t, la valeur exacte de I.

Épreuve de PROBABILITÉS et STATISTIQUES

Durée conseillée: 1 h 15

On effectue des sondages avant le second tour d'une élection présidentielle opposant les candidats A et B. On suppose qu'une proportion p de la population va voter pour A (avec $0 < p < 1$). On modèlisera ceci par le fait que chaque individu a une probabilité p de voter pour A et que les individus votent indépendament les uns des autres (ce qui n'est pas totalement réaliste...).

1. (a) Quelle est la probabilité qu'un individu quelconque vote pour B? Que deux individus quelconques votent tous les deux pour B?

   (b) On demande à 10 personnes quelconques leurs intentions de vote. On appelle N_{10} le nombre d'intentions de vote en faveur de A. Quelles sont les valeurs possibles prises par N_{10}? Quelle est la loi de N_{10} (justifier)? Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de N_{10}. En supposant que $p = 0.55$, quelle est la probabilité qu'au moins 6 personnes veuillent voter pour B?

   (c) On suppose que $p = 0.55$. On a choisit alors une personne au hasard parmi les 10 et elle s'apprète à voter pour A. Quelle est la probabilité que parmi les 10 personnes 8 personnes exactement désirent voter pour A?

   (d) (**facultatif**) Parmi les 10 personnes interrogées, on sait que 6 vont voter pour A. On choisit alors 2 personnes au hasard parmi les 10. Quelle est la probabilité qu'elles désirent voter toutes les deux pour A?

2. On suppose maintenant que 1000 personnes ont été interrogées. En notant N_{1000} le nombre d'intentions de vote en faveur de A, on va admettre que N_{1000} se comporte suivant une loi gaussienne de moyenne $m = 1000p$ et de variance $\sigma^2 = 1000p(1-p)$ ou p est inconnu.

   (a) On suppose que $p = 0.55$. Calculer d'abord la probabilité qu'il y ait au moins 500 personnes votant pour A puis celle qu'il y en ait entre 520 et 560 votant pour A.

   (b) On ne connaît pas p. Donner l'espérance, la variance et la loi de la variable aléatoire $S_{1000} = \dfrac{N_{1000}}{1000}$ (en fonction de p). Déterminer $a(p) > 0$ tel que $P(S_{1000} \in [p-a, p+a]) = 0.95$ (a dépend de p). En déduire qu'il y a plus de 95% de chance d'avoir p entre $S_{1000} - a(0.5)$ et $S_{1000} + a(0.5)$ (on utilisera le fait que $p(1-p)$ est maximal pour $p = 0.5$).

   (c) (**facultatif**) On suppose que pour les 1000 personnes choisies, formant l'événement élémentaire ω), il ya eu 540 voix pour A. Ainsi, $N_{1000}(\omega) = 540$. Que vaut $S_{1000}(\omega)$?À l'aide la question précédente, en déduire que ce sondage permet de dire qu'il y a plus de 95% de chance que p soit entre $0.54-0.031$ et $0.54+0.031$

(à 10^{-3} près). (Plus généralement, et contrairement à ce que disent les média, les résultats d'un sondage ne sont pas des valeurs fixes, mais des fourchettes de valeur données avec une certaine probabilité).

3. On a demandé à 15 personnes leur taille T (en cm) et leur poids P (en kg) et on note t_i et p_i les valeurs de T et P. On obtient le tableau suivant:

t_i	168	174	187	182	162	174	154	176	194	180	178	166	181	178	164
p_i	48	69	88	74	54	56	46	68	96	82	76	52	74	66	56

(a) Déterminer les moyennes et écarts-types de T et de P. Représenter les t_i par un histogramme comportant les classes: $[150, 165[$, $[165, 175[$, $[175, 185[$, $[185, 200]$.

(b) Représenter le nuage de points (t_i, p_i). Le poids semble-t-il dépendre de la taille? Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de P par T, et la tracer sur le nuage précédent. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Une régression linéaire vous semble-t-elle légitime? Une personne fait 70 kg. Quel poids doit-elle faire?