UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
DEUG SIENCES

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2000/2001
Second Semestre

EXAMEN TERMINAL

Module U.E.F.5

Épreuve de MATHEMATIQUES

Devoir de 3 heures.
Tout document est interdit à l'exception du guide Matlab et des énoncés des TP.
La seule calculatrice autorisée est celle de l'Université.

Épreuve d'ANALYSE (Durée conseillée: 2 h)

I SÉRIES ENTIÈRES

1. On commence par montrer deux résultats qui serviront par la suite.
   (a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = A$, où $A > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)a_n x^n$ est $\frac{1}{A}$.
   (b) Déterminer la nature (convergence, semi-convergence ou divergence) et la somme (lorsqu'elle existe) de la série entière $\sum_{n\geq 1} z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. En déduire pour $x \in]-1, 1[$, la valeur de $\sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$.
2. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :
   $$a_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du.$$
   Montrer que a_n existe pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que pour $n \geq 0$,
   $$\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
   En déduire le rayon de convergence de la série entière $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)a_n x^n$.

3. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)(1-x\,u)^2}du$. Montrer que F converge pour $x<1$ et diverge pour $x \geq 1$. Pour $x \in]-1,1[$ fixé, montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)(ux)^n$ converge normalement (en u) sur $[0,1]$. En déduire, que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = F(x).$$

II Séries de Fourier

Soit f la fonction réelle de période 2π telle que $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

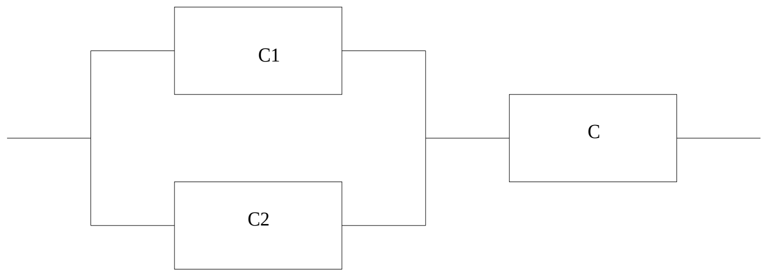
1. Tracer de la courbe représentative de f.
2. Montrer (en justifiant !) que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(n\,x).$$

3. En déduire les valeurs de $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. Calculer $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$. En déduire $S_3 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Épreuve de CALCUL SCIENTIFIQUE (Durée conseillée: 1 h)

1. Dans cette partie, on demande d'écrire des programmes en Matlab. N'hésitez pas à rajouter des commentaires...
   On désire, à partir de simulations, savoir le temps de vie moyen Tm d'un système électronique S composé d'un composant électronique C mis en série avec 2 composants, C_1 et C_2, qui sont eux mis en parallèle.



   (a) Les composants C_1, C_2 et C ont des durées de vie aléatoires, dont une bonne modélisation est une loi exponentielle de paramètres respectifs $b1$, $b2$ et b. On rappelle qu'une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre b peut se générer à partir d'une variable U de loi uniforme sur $[0,1]$, car X et $-\frac{1}{b}\ln(1-U)$ ont la même loi. Écrire une fonction *rexp* dont l'entrée est le paramètre b et la sortie une réalisation d'une variable exponentielle x de paramètre b.

(b) Pour un système formé de deux composants en parallèle, la durée de vie du système est la plus grande des durées de vie des 2 composants. Pour un système formé de deux composants en série, la durée de vie du système est la plus petite des durées de vie des 2 composants. Écrire une fonction *temps* dont les entrées sont les paramètres $b1$, $b2$ et b et dont la sortie est une réalisation du temps de vie (aléatoire) T de S.

(c) Que faudrait-il faire pour estimer la durée de vie moyenne Tm de S ? Comment avoir une idée de la densité de probabilité de T ? Écrire un programme *Duree.m* répondant à ces 2 requêtes pour $b1 = b = 1$ et $b2 = 2$.

2. On considère le programme Matlab suivant :

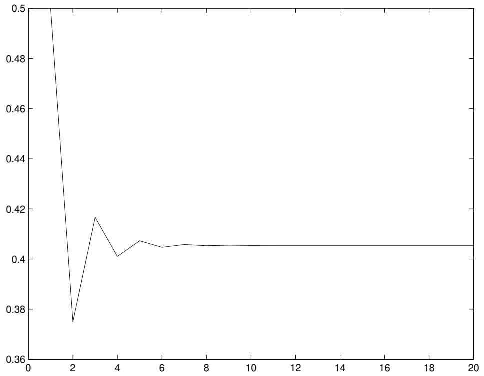
$$n = input('n\ ?');$$
$$S(1) = 0.5;$$
$$for\ \ k = 2 : n$$
$$\qquad S(k) = S(k-1) + (-1)\hat{}(k+1) * (0.5\hat{}k)/k;$$
$$end$$
$$plot(S)$$

(a) Commenter sommairement chaque ligne de ce programme en le recopiant sur votre copie.

(b) Quel est l'objet de ce programme ? Plus précisément,
   - quelle est la taille de la variable S ?
   - écrire sous forme mathématique le contenu de $S(k)$.
   - qu'est-ce que la variable n ?

(c) Transformer les lignes 2 à 5 du programme ci-dessus pour s'affranchir de la boucle, c'est-à-dire calculer S de manière vectorielle.

(d) Pour $n = 20$, on obtient la figure suivante :



Que suggère cette figure ? (On pourra étayer la réponse par des arguments théoriques...)