Université Paul Sabatier
DEUG Siences

Année Universitaire 1998/1999
Premier Semestre

EXAMEN TERMINAL

Module SMA08

Devoir de 4 heures. Tout document est interdit.
La seule calculatrice autorisée est celle de l'Université.

Épreuve d'ALGEBRE

Durée conseillée: 1 h 00

On considère la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer pourquoi A est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et une base de vecteurs propres. Calculer A^k, où $k \in \mathbb{N}^*$, et $\exp A$.

2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système suivant:

$$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & a \\ -x + y - 2z & = & b \\ 2x - 2y & = & c \end{array} \right. .$$

   Déterminer explicitement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ lorsque $a = 1$, $b = c = 0$.

3. Résoudre le système différentiel suivant:

$$(T) : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) - y(t) + 2z(t) + 1 \\ y'(t) & = & -x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) - 2y(t) \end{array} \right. .$$

   On commencera par résoudre le système homogène (TH) associé à (T), et on cherchera une solution particulière de (T).

Épreuve d'ANALYSE
Durée conseillée: 1 h 15

Le but de cet exercice est d'étudier la série $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \frac{1}{4}}$.

1. Montrer que la série S existe. En utilisant une majoration du reste, calculer une approximation de S à 10^{-1} près.
2. Pour $a \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que pour $t \in [-\pi, \pi[$, $f_a(t) = \cos(at)$.
   (a) On suppose que $a \in \mathbb{N}$. Donner le développement en série de Fourier de f_a (sans calcul...).
   (b) Représenter graphiquement f sur $[-4\pi, 4\pi]$ pour $a = \frac{1}{2}$.
   (c) Pour a réel positif **n'appartenant pas à** $\mathbb{N}$, calculer les coefficients de Fourier $a_0(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ (on rappelle que $2.\cos(x).\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$).
   (d) En le justifiant rigoureusement, donner le développement en série de Fourier de $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. En choisissant une valeur particulière de t, en déduire la valeur des séries $S_a^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ et $S_a^- = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - a^2}$. En déduire la valeur de S. Déterminer $S'_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - a^2)^2}$.
3. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - \frac{1}{4}} = -4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - \frac{1}{4}}$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence de S.
   (b) Montrer que S converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que S est continue sur $[-1, 1]$.
   (c) Montrer que S est solution de l'équation différentielle (E):
   $x^2 y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4} y(x) = \frac{1}{1-x}$ sur tout intervalle inclus dans $]-1, 1[$.
   (d) (<u>**facultatif**</u>) On montre que sur $]-1, 0[$, les solutions de (E) sont de la forme:
   $$y(x) = -2\left(1 + \sqrt{-z}(\alpha + \arctan(\sqrt{-z})) + \frac{1}{\sqrt{-z}}(\beta + \arctan(\sqrt{-z})\right) \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}.$$
   En déduire l'expression exacte de $S(x)$ pour $x \in]-1, 0[$ (on pourra montrer que $\alpha = \beta = 0$ en utilisant les limites de S et de S' en 0). En le justifiant, déduire la valeur de S (utiliser la continuité en -1...).

Épreuve de PROBABILITÉS et STATISTIQUES

Durée conseillée: 1 h 15

Le but de cet exercice est d'étudier suivant différentes perspectives statistiques et probabilistes une expérience aléatoire. Cette expérience est la suivante: on jette deux dés équilibrés et on note X le nombre indiqué par le premier dé et Y le nombre indiqué par le second dé. On note Z la somme de ces deux nombres.

1. On considère X, Y et Z comme des variables aléatoires discrètes.

   (a) Donner les lois de probabilités de X et de Z sous forme de tableaux. Déterminer les espérances et variances de X et Z.

   (b) On suppose que l'on a obtenu $Z = 3$. Quelle est alors la probabilité que $X = 2$? Les événements $Z = 3$ et $X = 2$ sont-ils indépendants?

2. On considère maintenant que X et Y sont deux variables aléatoires continues indépendantes identiquement distribuées, de loi uniforme sur $[1, 7]$. On pose $Z = X + Y$.

   (a) Que vaut $P(X = 7)$?

   (b) Déterminer l'espérance et la variance de X (refaire les calculs...on rappele que la fonction de densité de X est $f_X(x) = 1/6$ si $x \in [1, 7]$, 0 sinon).

   (c) La fonction de densité de Z est: $f_Z(x) = \dfrac{x-2}{36}$ si $x \in [2, 8]$, $f_Z(x) = \dfrac{14-x}{36}$ si $x \in [8, 14]$ et 0 sinon). Donner l'espérance et la variance de Z. Déterminer la fonction de répartition $F_Z(.)$.

3. (Question uniquement pour **Toulouse**) On a effectué 20 fois l'expérience précédente et on note x_i et z_i les valeurs de X et Z pour la ième expérience. On obtient le tableau suivant:

x_i	6	2	4	3	6	5	3	1	5	3	4	5	6	5	2	3	6	6	3	6
z_i	7	5	9	4	7	7	5	5	7	5	5	10	9	11	5	6	12	10	5	11

   (a) Déterminer les moyennes et écarts-types de X et de Z. Représenter les z_i par un histogramme comportant les classes: $[2, 5[$, $[5, 8[$, $[8, 11[$, $[11, 12]$. En déduire la médiane des z_i.

   (b) Représenter le nuage de points (x_i, z_i). Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de Z par X, et tracer la sur le nuage précédent. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Une régression vous semble-t-elle légitime?

4. (Question uniquement pour **Albi**) On suppose que l'on jette n fois le dé, et on appelle N_n le nombre de 6 obtenus. Donner la loi de probabilité de N_n, son espérance et sa variance. Pour $n = 20$, calculer $P(2 \leq N_n \leq 4)$.

Épreuve de CALCUL SCIENTIFIQUE
Durée conseillée: 0 h 30

A est une matrice d'ordre n donnée, dont le polynôme caractéristique s'écrit:

$$P(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_n$$

1. Expliquer avec soin l'idée de la méthode de calcul de Le Verrier de $P(s)$.
2. Construire avec précision le triangle permettant de trouver les coefficients $\{a_k\}$, $k = 1, 2, .., n$.
3. Application à la matrice d'ordre 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer par un processus numérique le développement en série de Taylor de $P(s)$ pour $s = 1,2345$.