Université Paul Sabatier
DEUG Sciences

Année Universitaire 1999/2000
Septembre 2000

Module SMA08

Devoir de 4 heures. Tout document est interdit.
La seule calculatrice autorisée est celle de l'Université.

Épreuve d'ALGEBRE

Durée conseillée: 1 h 00

On considère un territoire fermé sur lequel survivent deux espèces d'animaux prédateurs, A et B. On appelle a_n et b_n les nombres respectifs de A et de B à la date n. Chaque espèce a tendance à se reproduire de la date n à la date $n+1$ avec les taux respectifs $r_a > 0$ et $r_b > 0$, tout en étant éliminée par l'autre espèce avec les taux $e_a \geq 0$ et $e_b \geq 0$.

1. Expliquer pourquoi les equations d'évolution de ces espèces forment le système:
$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & r_a a_n - e_a b_n \\ b_{n+1} & = & r_b b_n - e_b a_n \end{array} \right. .$$
2. On suppose que a_0 et b_0 sont connus. Montrer que ceci permet de calculer $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On pose $C_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une équation de récurrence $C_{n+1} = M.C_n$, où M est une matrice d'ordre 2 à identifier.
4. On veut connaître l'évolution à long-terme des populations animales. Montrer que cela revient à connaître M^n pour n grand.
5. Montrer que M est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si $e_a e_b \neq 0$.
6. On suppose que $r_a = 1.4$, $r_b = 1.6$, $e_a = 0.3$ et $e_b = 0.8$. Déterminer M^n. Que se passe-t-il à long-terme pour les animaux si $a_0 = 10$ et $b_0 = 20$? Si $a_0 = 20$ et $b_0 = 10$? Quelle relation doivent vérifier a_0 et b_0 pour que les deux espèces coexistent?

Épreuve d'ANALYSE
Durée conseillée: 1 h 15

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$. Étudier la convergence pour $z = 1$. Pour $x \in]-1, 1[$, donner une autre expression de $S(x)$.

2. Justifier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt$ pour tout $x \in]0, 1[$.

3. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, pour $n \geq 2$,
$$\frac{x^n}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x^t}{t} dt \leq \frac{x^{n-1}}{n-1}.$$

4. On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonction (f_n) telle que
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t} dt.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, pour quelles valeurs de $x > 0$, cette suite de fonctions existe-t-elle?

5. Montrer que pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq p < q$, on a pour tout $x \in]0, 1[$, $\sum_{k=p+1}^{q} \left(\frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{x^k}{k} \right) = \frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q}$.

6. Déduire des questions 3 et 5 que pour tout $x \in]0, 1[$, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2 \leq p < q$, on a
$$0 \leq f_p(x) - f_q(x) < \frac{1}{p}.$$
En déduire que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction f (à déterminer) sur $]0, 1[$.

7. **(Facultatif)** Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :
$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} + \ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right].$$
Montrer que (S_n) converge. Prouver que pour tout entier $n \geq 2$, $\lim_{x \to 1^-} f_n(x) = S_n$.

Épreuve de PROBABILITÉS et STATISTIQUES

Durée conseillée: 1 h 15

Une calculatrice (ou un ordinateur) possède un générateur de nombre pseudo-aléatoire (touche *rand* en général), c'est-à-dire qu'elle peut donner un nombre situé de manière "équiprobable" dans l'intervalle $[0,1]$. On considèrera qu'un tel nombre est une réalisation $U(\omega)$ d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, U.

1. La variable U est une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité 1 sur $[0,1]$ et 0 sinon. Calculer $P(T > 0.5)$ et $P(T = 0.5)$. Montrer que pour $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a+b \leq 1$, on a $P(T \in [a, a+b]) = P(T \in [0,b])$ et interpréter ce résultat.

2. Calculer $\mathbb{E}U$ et $\mathrm{var}(U)$ (refaire les calculs).

3. On veut, à partir de U, générer une variable aléatoire discrète V telle que $P(V = 3) = p$ et $P(V = 4) = 1-p$ avec $p \in [0,1]$. On met en place la procédure suivante: à partir de la valeur de U, si $0 \leq U < p$ alors $V = 3$, sinon $V = 4$. Montrer que l'on a bien généré la variable V précédemment définie.

4. En déduire une procédure permettant de générer une variable discrète W telle que $P(W = w_0) = p_0$, $P(W = w_1) = p_1$ et $P(W = w_2) = 1 - p_0 - p_1$ avec (w_0, w_1, w_2) distincts et $(p_0, p_1) \in [0,1]^2$. Quelle est l'espérance de W?

5. On veut, à partir de U, générer une variable aléatoire absolument continue X telle que $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Quelles sont les valeurs possibles pour X? Montrer que la fonction de répartition de X, $F_X(x) = P(X \leq x)$, est telle que $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$, et $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ (avec $\lambda > 0$). Déterminer la densité de probabilité de X, ainsi que son espérance. Quelle variable a-t-on ainsi générée?

6. Déterminer une expression simple de $P(X > t + s \,|\, X > t)$ pour s et t deux réels strictement positifs.

Épreuve de CALCUL SCIENTIFIQUE
Durée conseillée: 0 h 30

1. Calculer par un processus numérique le développement en série de Taylor du polynôme:
$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 10x + 4,$$
au voisinage de $x = 1,2$.

2. On pose $P^*(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ où les x_i sont des réels distincts.

   (a) Développer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{P^*(x)}$.

   (b) Construire l'identité de Lagrange.

   (c) En déduire alors le polynôme de Lagrange.