Partiel de Mathématiques

DDSM08M - Novembre 1998

Devoir de 2 heures. Tout document est interdit.
La seule calculatrice autorisée est celle de l'Université.

1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et soit $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à n (pour $n \in \mathbb{N}$). On considère l'application ϕ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dans E, telle que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = Q$ avec $Q(X) = X(P(X+1) - P(X))$.

   (a) Donner la base canonique $e^{(n)}$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et en déduire la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est de degré k alors $\phi_n(P)$ est degré k. En déduire que ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) On suppose que $n = 2$. Quelles sont les coordonnées de $R(X) = -2X^2 + 5X$ dans $e^{(2)}$? Déterminer la matrice A_2 de ϕ_2 dans la base $e^{(2)}$. En déduire les coordonnées de $\phi_2(R)$, puis le polynôme caractéristique de A_2 et le spectre de ϕ_2. A_2 est-elle diagonalisable? Calculer A_2^k pour $k \in \mathbb{N}$, puis $\exp(A_2)$. Déterminer un polynôme $S(X)$ tel que $\phi_2(S) = R$.

   (d) n est maintenant quelconque. Montrer que $\mathbb{R}_0[X]$ n'appartient pas à $Im\phi_n$. En déduire que 0 est une valeur propre de ϕ_n. L'application ϕ_n est-elle bijective? Déterminer la matrice A_n de ϕ_n dans la base $e^{(n)}$. En déduire le polynôme caractéristique de A_n et le spectre de ϕ_n. A_n est-elle diagonalisable?

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

   (a) Montrer que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer u_1.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 (on pourra majorer u_n en utilisant le fait que $4(1+t^3) > (1+t)^3$ pour tout $t \in [0, +\infty[$).

   (c) Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{3n} u_n$ pour $n \geq 1$ (on utilisera une intégration par parties et le fait que $t^3 = t^2.t$).

   (d) Montrer que $\sum u_n$ est divergente.

   (e) Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge. Que doit valoir N pour que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (-1)^n u_n$ soit une approximation à 10^{-3} près de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$?