UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
DEUG SIENCES de la MATIÈRE

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2000/2001

Partiel de Mathématiques

Module UEF03

Devoir de 2 heures. Tout document est interdit.
La seule calculatrice autorisée est celle de l'Université.

I (durée conseillée: 1 h 00)

1. Caluler les déterminants de

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & -7 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Calculer (pour $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^n.$$

3. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

II (durée conseillée: 1 h 00)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues dans $[0, \pi/2]$. On considère l'application $F : E \to E$ telle que pour $f \in E$, $F(f) = g$ avec

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} f(t) \sin(x+t) dt,$$

pour $x \in [0, \pi/2]$. On rappelle par ailleurs que pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b); \\ 2\sin a \sin b &= \cos(a-b) - \cos(a+b), \\ 2\cos a \sin b &= \sin(a+b) - \sin(a-b). \end{aligned}$$

1. Déterminer $F(f_0)$ où $f_0(x) = 1$ pour $x \in [0, \pi/2]$.

2. Vérifier que l'application F est linéaire.

3. Montrer que les fonctions $s = \sin$ et $c = \cos$ sont des vecteurs libres de E.

4. Montrer que $Im(F)$, qui est un sous-espace vectoriel de E, est inclus dans le sous-espace $< (s, c) >$ engendré par les vecteurs s et c. Déterminer $F(s)$ et $F(c)$ et en déduire la dimension de $Im(F)$.

5. Déduire de la question précédente que 0 est une valeur propre de F (on pourra considérer $Ker(F)$). A votre avis, quelle est la dimension du sous-espace propre associé à 0?

6. Montrer que si $h \in E$ est un vecteur propre de F associé à une valeur propre λ non nulle alors $h \in Im(F)$. En déduire que h s'écrit $h = a.s + b.c$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer alors les deux valeurs propres non-nulles de F et leurs sous-espaces propres associés.