UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
DEUG SIENCES

ANNÉE UNIVERSITAIRE 1998/1999
Premier Semestre

Partiel de Mathématiques

Module SMA08

Devoir de 2 heures. Tout document est interdit.
La seule calculatrice autorisée est celle de l'Université.

Épreuve d'ANALYSE
Durée conseillée: 1 h 00

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. On pourra utiliser le résultat suivant (sans avoir à le démontrer) :

La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente.*

On va s'intéresser aux convergences de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ et de $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} - 1 = 2i.e^{\frac{ix}{2}}.\sin(\dfrac{x}{2})$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} e^{ik}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k) = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}).\sin(\frac{n}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) est-elle bornée?

2. Déterminer $u_{n+1} - u_n$. Montrer que $S_n = \dfrac{u_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{u_k}{k(k+1)}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ converge. En déduire que S est convergente.

3. Montrer que $\int_0^1 f(t)dt$ existe. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(t)dt$ existe. En déduire que I existe.

4. Montrer que $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(2t)}{t}dt$ est convergente. En déduire que $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \dfrac{\sin^2(t)}{t}dt$ n'existe pas. En déduire que I est semi-convergente.