Université Paul Sabatier
DEUG Siences de la Matière

Année Universitaire 2000/2001

Partiel de Mathématiques

Module UEF05

Devoir de 2 heures. Tout document est interdit.
La seule calculatrice autorisée est celle de l'Université.
Le problème comporte de nombreuses questions indépendantes.

L'objet de ce problème est de donner des approximations de π en utilisant des séries numériques.

1. Pour $t \geq 0$, on considère les séries $\sum (-1)^n \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

   (a) Pour $t \geq 0$, soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_0 et u_1. Suivant la valeur de t, étudier la nature (convergente ou divergente) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et dans le cas de la convergence, donner sa limite.

   (b) Montrer que lorsque $0 \leq t \leq 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Déduire de ce qui précède que la série $\sum (-1)^n \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ est convergente pour $0 \leq t \leq 1$, et divergente pour $t > 1$.

   (d) On admettra que pour $0 \leq t \leq 1$ alors

   $$\arctan(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \tag{1}$$

   (on rappelle que la fonction arctan est la fonction réciproque de la fonction définie par : $t \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \tan(t) \in \mathbb{R}$). En déduire que $\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$. Déterminer combien faut-il calculer de termes dans cette série pour obtenir une estimation de π à 10^{-3} près.

   (e) En utilisant $t = 1/\sqrt{3}$, déterminer une autre approximation de π à partir de (1). Combien faut-il alors calculer de termes dans la série pour obtenir une estimation de π à 10^{-3} près ? Quel est le problème avec cette approximation ?

2. Pour $t \geq 0$, on considère maintenant les séries $\sum \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

(a) On pose $v_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que $0! = 1! = 1$ par convention). Montrer que pour $t > 0$, on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^2\left(\dfrac{2n+2}{2n+3}\right)t^2$. En déduire que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ converge pour $0 \leq t < 1$, et diverge pour $t > 1$.

(b) Montrer que pour $0 \leq t \leq 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (on pourra utiliser $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$) et en déduire que $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{1}{2n+1} \leq 1$ (on choisira $t = 1$).

(c) On admettra que

$$\pi = 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}. \tag{2}$$

On considère le reste d'ordre n de cette série $R_n = 6\sum_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\dfrac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$. Montrer que $R_n \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. En vous aidant de la question précédente, montrer que $R_n \leq R'_n$ avec $R'_n = 6\sum_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2k+1}}$ (vous expliquerez pourquoi R'_n existe pour $n \in \mathbb{N}$).

(d) En déduire le nombre de termes à calculer dans la série (2) pour obtenir une estimation de π à 10^{-3} près (on pourra calculer exactement R'_n). Donner cette estimation sous la forme d'une fraction.