Mesure et Intégration

Examen de Septembre 2001

Examen sans document de 2h00

Les deux exercices suivants sont indépendants. De même, les différentes questions de chaque exercice sont le plus souvent indépendantes les unes des autres.

1. On s'intéresse aux futurs résultats de l'équipe de football du Magistère pour la saison 2001/2002. Pour cela, on considère que chaque match est une expérience aléatoire pouvant conduire à 3 résultats différents : V lorsque l'équipe gagne, N pour un nul et D pour une défaite.

   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit Ω_k l'ensemble des résultats possibles de la k-ième rencontre, $\mathcal{A}_k = \mathcal{P}(\Omega_k)$ la tribu formée de l'ensemble des parties de Ω_k et enfin, comme l'équipe de football du Magistère ne fait que progresser après chaque rencontre, la mesure de probabilité P_k sur $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$ telle que :

   $$P_k(\omega_k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2^k} & \text{si } \omega_k = \{V\} \\ \dfrac{1}{3.2^k} & \text{si } \omega_k = \{N\} \\ \dfrac{2}{3.2^k} & \text{si } \omega_k = \{D\} \end{cases}$$

   Décrire explicitement $\mathcal{A}_k$. Montrer que P_k est bien une mesure de probabilité.

   (b) On définit l'application R_k représentant le nombre de points alloués à l'équipe lors de la k-ième rencontre et telle que $R_k = 2$ en cas de victoire, $R_k = 1$ pour un nul et $R_k = 0$ pour une défaite. Déterminer $R_k^{-1}(\{1, 2\})$ puis $R_k^{-1}([1.5, 3])$. Montrer que R_k est une variable aléatoire. Déterminer une tribu $\mathcal{T}_k$ associée à Ω_k telle que R_k ne soit pas une variable aléatoire de $(\Omega_k, \mathcal{T}_k)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

   (c) Pour R_k définie sur $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k)$, décrire la mesure image P_{R_k} de P_k par R_k. Calculer l'espérance de R_k, puis, la fonction caractéristique de R_k et de $R_k - 2$.

   (d) Comme les matchs se suivent dans un ordre défini par un tirage au sort, on admet que les résultats des différentes rencontres sont mutuellement indépendants. Montrer que $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend en loi, en probabilité, dans $\mathbb{L}^1$, dans $\mathbb{L}^2$ et enfin presque sûrement vers 2.

   (e) On considère la somme S_n des points de l'équipe au terme de la n-ième rencontre. Déterminer l'espérance de $\overline{R_n} = \dfrac{S_n}{n}$. Démontrer que, $\overline{R_n}$ suit une loi faible des grands nombres.

2. On s'intéresse à la durée de vie T d'une ampoule électrique. Après observation du comportement d'un grand nombre d'ampoules, on modélise T (en milliers d'heures) de la façon

suivante : T est une variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ représente la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est telle que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_T(x) = \frac{1}{10}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) + \frac{9}{10}\left(1 - \frac{1}{(1+x^a)^b}\right)\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x),$$

où $a > 0$ et $b \geq 0$.

(a) Montrer que F_T est bien une fonction de répartition. Calculer $P(T = 0)$, $P(T = 2)$, $P(T < 2)$.

(b) Soit P_T la mesure de probabilité associée à F_T. Décomposer, en justifiant, P_T sous la forme d'une somme d'une masse de Dirac et d'une mesure μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ dont on donnera la densité. Pour A borélien de $\mathbb{R}$, donner l'expression de $\mu(A)$.

(c) Donner l'expression générale de $\mathbb{E}(T)$ (on ne cherchera pas à simplifier l'intégrale). Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $\mathbb{E}T < \infty$?

(d) Dans le cas où $a = 2$ et $b = 1$, calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathrm{var}(T)$.

(e) On ne connaît pas a et b, mais on possède les temps de vie $(T_1, \cdots, T_n)$ de n ampoules (indépendantes). Montrer que pour $x > 0$, la suite de variables aléatoires $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $F_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{]-\infty,x]}(T_k)$ vérifie une loi des grands nombres et un théorème de limite centrale (que l'on écrira).

(f) On suppose que sur 100 ampoules, 7 ont grillées immédiatement, 84 en moins de 1000 heures et 98 en moins de 2000 heures. En déduire des estimateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de a et de b.