Mesure et Intégration

Contrôle Continu n^o 1

Examen sans document de 1h30

Préambule : On considère $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ et $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ trois espaces mesurables. On suppose que $f : \Omega \to \Omega'$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-mesurable et que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$. Montrer alors que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-mesurable.

Problème : Soit $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_1)$ l'espace probabilisé où λ_1 est la mesure de Lebesgue sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$

1. Donner un exemple d'ensemble $A \in \mathcal{B}([0,1])$ tel que $\lambda_1(A) = 0.3$. Donner un exemple d'ensemble $B \in \mathcal{B}([0,1])$ tel que $\lambda_1(B) = 0$ et tel que B soit un ensemble contenant une infinité d'éléments. Expliquer à chaque fois.

2. Soit la fonction p_1 telle que pour tout $\omega \in [0,1]$, $p_1(\omega) = \omega$. Montrer que p_1 est une variable aléatoire dont on donnera l'ensemble des valeurs prises. Déterminer, en justifiant, $p_1^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer la mesure de probabilité de p_1, ainsi que sa fonction de répartition. Quelle type de loi suit p_1 ?

3. Soit la constante $p \in [0,1]$. On définit alors la fonction X_p telle que pour $\omega \in [0,1]$, $X_p(\omega) = 1$ si $\omega \geq p$ et $X_p(\omega) = 0$ sinon. Montrer que X_p est une variable aléatoire dont on donnera l'ensemble des valeurs prises. Déterminer, en justifiant, $X_p^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer la mesure de probabilité de X_p. Quelle type de loi suit X_p ?

4. On suppose que (p_n) est une suite strictement croissante de réels de $[0,1]$ telle que $\lim p_n = 1$. Déterminer $\liminf X_{p_n}$ et $\limsup X_{p_n}$.

5. Soit maintenant l'espace probabilisé $([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), \lambda_2)$ où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2))$. Donner un exemple d'ensemble C appartenant à $\mathcal{B}([0,1]^2)$ tel que $\lambda_2(C) = 0.5$. On définit la fonction Y telle que pour $(\omega_1, \omega_2) \in [0,1]^2$,
$$Y(\omega_1, \omega_2) = X_{p_1(\omega_1)}(\omega_2).$$
Montrer que Y est une variable aléatoire dont on donnera l'ensemble des valeurs prises. Déterminer $Y^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (on pourra s'aider d'une représentation graphique). Déterminer la mesure de probabilité de Y. Quelle type de loi suit Y ?