Mesure et Intégration

Examen Terminal - Fevrier 2001

Examen sans document de 3h00

Les trois exercices suivants sont indépendants. De même, les différentes questions de chaque exercice sont le plus souvent indépendantes les unes des autres.

1. Soit l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ tel que $\mathcal{B}([0,1])$ est la tribu des boréliens de $[0,1]$ et λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

   (a) Montrer que $\{0.3\}$, $[a,b[$, avec $0 \leq a < b \leq 1$, et $\{(0.7)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des ensembles mesurables de $\mathcal{B}([0,1])$ et calculer leur λ-mesure.

   (b) Soit X_1 l'application sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ telle que :
   $$X_1(\omega) = \mathbb{I}_{[0,p_1[}(\omega) + \mathbb{I}_{[p_1,p_1+p_2[}(\omega), \quad \text{pour } \omega \in [0,1],$$
   avec $(p_1, p_2) \in [0,1]^2$ et $p_1 + p_2 \leq 1$. Quelles sont les valeurs possibles de X_1 ? Montrer que X_1 est une variable aléatoire. Déterminer $X_1^{-1}(]-\infty, x_1])$ pour $x_1 \in \mathbb{R}$. En déduire la mesure de probabilité P_{X_1} de X_1.

   (c) Soit $F \ : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ une fonction de répartition continue strictement croissante. Indiquer pourquoi F admet une application réciproque F^{-1}. Soit X_2 l'application sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ telle que :
   $$X_2(\omega) = F^{-1}(\omega), \quad \text{pour } \omega \in [0,1].$$
   Quelles sont les valeurs possibles de X_2 ? Montrer que X_1 est une variable aléatoire. Déterminer $X_1^{-1}(]-\infty, x_2])$ pour $x_2 \in \mathbb{R}$. En déduire la mesure de probabilité P_{X_2} de X_2.

   (d) On suppose qu'un ordinateur sache généré un nombre pseudo-aléatoire u, réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ (touche *rand* de la calculatrice). En déduire une procédure simple pour générer une réalisation d'une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(2, 0.5)$, puis $\mathcal{B}(3, 0.5)$ et une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy (de densité par rapport à la mesure de Lebegue sur $\mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$ pour $t \in \mathbb{R}$).

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, 9\}$ telle que :
   $$P(X = k) = p_k \text{ pour } k \in \{0, 1, \cdots, 9\}.$$
   Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de même loi que X. Enfin, soit $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite de variables aléatoires définies par :
   $$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{10^k}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Soit μ_X la mesure de probabilité associée à X. Donner l'expression de μ_X. Montrer que l'espérance de X existe et donner son expression.

(b) Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y_1 ? Y_2 ? Y_n ?

(c) On suppose dans cette question que $p_k = 0.1$ pour $k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$. Donner l'expression de μ_n mesure de probabilité de Y_n. Déterminer la fonction caractéristique de Y_n, $\phi_n(t) = \mathbb{E}(\exp(itY_n))$ pour $t \in \mathbb{R}$. Soit ν la mesure de probabilité d'une variable uniforme Z sur $[0, 1]$. Déterminer la fonction caractéristique de Z, et en déduire que Y_n converge en loi vers ν.

(d) On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que $p_k \geq 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$. Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, $(Y_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante qui converge vers $Y(\omega)$ où Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. En déduire que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend presque sûrement vers Y.

(e) Montrer que :

$$|Y_n - Y| \leq 10^{-n}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

En déduire que pour tout $q > 0$, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend en norme $\mathbb{L}^q$ vers Y.

(f) Déterminer $\mathbb{E}Y_n$ en fonction de $\mathbb{E}X$ et en déduire $\mathbb{E}Y$ en fonction de $\mathbb{E}X$ (justifier...).

3. Dans le cadre d'une modélisation par un échantillon gaussien, on peut être amené à considérer une variable de Student T_n à n degrés de liberté. Cette variable T_n, qui est la moyenne empirique divisée par l'écart-type empirique pour n variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes, a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$f_n(x) = c_n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R},$$

avec c_n une constante ne dépendant que de n et permettant à f_n d'être une densité de probabilité. On s'intéresse à la limite en loi de T_n lorsque $n \to \infty$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) On pose $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{c_n} \mathbb{I}_{[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]}(x)$. Montrer que $J_n(a, b) = \displaystyle\int_a^b g_n(x)dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

(c) Montrer que pour $0 \leq x \leq 1$, $\ln(1 + x) \geq \dfrac{x}{2}$. Après avoir montré son existence, déterminer pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, $J(a, b) = \lim_{n\to\infty} J_n(a, b)$ (on exprimera $J(a, b)$ sous forme d'une intégrale sur $[a, b]$). En déduire que $I_n(a, b) = \displaystyle\int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$ converge vers $J(a, b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

(d) En déduire que T_n converge en loi vers une loi à préciser.