Mesure et Intégration

Contrôle Continu n^o 2

Examen sans document de 1h30

I : Après avoir étudier son existence, calculer (si cela est possible) :

1. l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$ lorsque μ est
   (a) la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
   (b) la mesure $3\delta_{\{1\}} + 2\delta_{\{4\}}$;
   (c) la mesure Card, mesure de comptage des entiers positifs.
2. l'intégrale $\int_{\Omega} \exp(-X) dP$ lorsque $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé, et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que
   (a) X est une variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$;
   (b) X est une variable exponentielle d'espérance $\beta > 0$;
   (c) X est une variable gaussienne centrée réduite

   (dans cette partie, on rappellera d'abord l'expression de la mesure induite par X).

II : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et pour tout $t \in [a,b]$ (avec $a < b$), soit $f : \omega \in \Omega \mapsto f(\omega, t) \in \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. On suppose qu'il existe une fonction $g : \omega \in \Omega \mapsto g(\omega) \in \mathbb{R}_+$, μ-intégrable telle que $\forall t \in [a,b]$,

$$|f(\omega,t)| \leq g(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

1. Montrer que $\forall t \in [a,b]$, la fonction
$$H(t) = \int_{\Omega} f(\omega,t) d\mu(\omega) \text{ existe.}$$
2. Soit $t_* \in [a,b]$. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \to f(\omega,t)$ est continue en t_*. En considérant une suite $(t_n)_n$ convergeant vers t_* et le Théorème de Lebesgue, montrer que
$$\lim_{t \to t_*} \int_{\Omega} f(\omega,t) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega, t^*) d\mu(\omega).$$
   En déduire que la fonction H est continue en t_*.
3. On suppose maintenant que $\frac{df}{dt}(\omega,t)$ existe pour $(\omega,t) \in \Omega \times [a,b]$ et qu'il existe une fonction $k : \Omega \to \mathbb{R}_+$, μ-intégrable telle que $\forall t \in [a,b]$,
$$\left|\frac{df}{dt}(\omega,t)\right| \leq k(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

En utilisant le fait que pour tout $t \in [a,b]$, $\frac{df}{dt}(\omega,t) = \lim_{t_n \to t} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$ où $(t_n)_n$ est une suite tendant vers t, montrer que $H(t)$ est dérivable sur $[a,b]$ et que pour $t \in [a,b]$:

$$H'(t) = \int_\omega \frac{df}{dt}(\omega,t)d\mu(\omega).$$

4. En utilisant ce qui précède, étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$$

(on exprimera en particulier la dérivée de H et on étudiera sa limite en 0^+).