Mesure et Intégration

Contrôle Continu n^o 2

Examen sans document de 1h30

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit alors Y de la façon suivante :

$$Y = \begin{cases} X & \text{si} \quad X \geq 0; \\ 0 & \text{si} \quad X < 0; \end{cases}$$

1. Montrer que Y est une variable aléatoire (on pourra écrire Y à partir de fonction(s) indicatrice(s)).

2. On appelle F_X la fonction de répartition de X. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de F_X. Traiter les cas particuliers suivants :

   (a) X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p (on a donc : $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$);

   (b) X suit une loi exponentielle translatée de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $g_X(x) = \theta e^{-\theta(x+1)} \mathbb{I}_{[-1,\infty[}(x)$, avec $\theta > 0$.

3. Exprimer $P(Y \in]a, b])$ en fonction de F_X suivant les valeurs de a et b.

4. Trouver un exemple de loi pour X tel que X et Y sont indépendantes. De même, trouver un exemple de loi pour X tel que X et Y ne sont pas indépendantes.

5. On suppose que la mesure de probabilité P_X de X admet une densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue. Rappeler la définition de P_X et son écriture en fonction de f_X. Dans quel cas (condition portant sur f_X) la mesure de probabilité P_Y de Y admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?

6. Dans le cas où P_Y n'est pas dominée par la mesure de Lebesgue, donner l'expression générale de P_Y (décomposer comme somme de 2 mesures) en fonction de f_X.

7. On se place dans le cas où $f_X = g_X$. On suppose que Y modélise le temps quotidiennement passé par un Français devant la télévision (en heures). Si on suppose que 5% des Français ne regardent jamais la télévision, déterminer quel est le temps moyen passé devant la télévision.

8. On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tendant en probabilité vers une constante $c \in \mathbb{R}$. On définit pour chaque X_n la variable aléatoire Y_n comme ci-dessus. Suivant la valeur de c, quel est le comportement asymptotique pour la convergence en probabilité de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$?