Mesure et Intégration

Examen Terminal - Février 2003

Examen sans document de 3h00

Les trois exercices suivants sont indépendants. De même, les différentes questions de chaque exercice sont le plus souvent indépendantes les unes des autres.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire **positive ou nulle**. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_n = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \geq n\} \quad \text{et} \quad B_n = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } n \leq X(\omega) < n+1\}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n et B_n sont mesurables.

   (b) Démontrer que si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} X\, dP = 0$. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} n\, P(A_n) = 0$.

   (c) Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{B_n} X\, dP < +\infty$. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, P(B_n) \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, P(B_n)$.

   En déduire que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, P(B_n) < +\infty$.

   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} k\, P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - n\, P(A_{n+1})$.

   (e) En utilisant l'ensemble des questions précédentes, montrer que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) < +\infty$.

   (f) Application : soit X de fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) \left(1 - \dfrac{1}{2 + x^\alpha}\right)$, où $\alpha > 1$. Exprimer la mesure de probabilité P_X. A-t-on $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$?

2. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un espace probabilisé, de mesure de probabilité P_X. On suppose que $E(|X|) < +\infty$ et on note $m = \mathbb{E}(X)$.

   (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction $\omega \in \Omega \mapsto \exp(\theta\, X(\omega))$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, puis que $\mathbb{E}(\exp(\theta\, X))$ existe.

   (b) On définit la fonction $\Lambda(.)$, dite log-Laplace de X, par $\Lambda(\theta) = \ln\left(\mathbb{E}(\exp(\theta\, X))\right)$ lorsque $\mathbb{E}(\exp(\theta\, X)) < +\infty$ et $\Lambda(\theta) = +\infty$ sinon. Calculer $\Lambda(0)$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Jensen, que $\Lambda(\theta) \geq \theta\, m$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

   (c) En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\mathbb{E}\left(\exp(\alpha\, \theta_1\, X + (1-\alpha)\, \theta_2\, X)\right) \leq \left[\mathbb{E}\left(\exp(\theta_1\, X)\right)\right]^\alpha \left[\mathbb{E}\left(\exp(\theta_2\, X)\right)\right]^{1-\alpha}.$$

   En déduire que la fonction $\Lambda(.)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(d) On définit la fonction (dite transformée de Legendre de Λ), $\Lambda^*(x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{\theta\, x - \Lambda(\theta)\}$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ce supremum pouvant être $+\infty$). Pour se familiariser avec les fonctions Λ et Λ^*, montrer que si X est une loi normale de moyenne m et de variance σ^2, alors :

$$\Lambda^*(x) = \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer également que lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \Lambda^*(x) &= x \ln\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) && \text{lorsque } x \in [0,1] \\ &= +\infty && \text{sinon,} \end{aligned}$$

(en considérant que $x \ln x = 0$ en 0).

(e) On reprend le cas général. Déduire de la question (b) que $\Lambda^*(m) = 0$, puis que $\Lambda^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(f) Montrer que Λ^* est une fonction convexe (c'est-à-dire que tout pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, et tout $\alpha \in [0,1]$, $\Lambda^*(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \leq \alpha \Lambda^*(x_1) + (1-\alpha)\Lambda^*(x_2)$). En déduire à l'aide de la question précédente que Λ^* est croissante sur $[m, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, m]$. Enfin, en utilisant tout ceci, montrer que pour $x \in [m, +\infty[$, $\Lambda^*(x) = \sup_{\theta > 0} \{\theta\, x - \Lambda(\theta)\}$ et pour $x \in]-\infty, m]$, $\Lambda^*(x) = \sup_{\theta < 0} \{\theta\, x - \Lambda(\theta)\}$.

(g) En appliquant l'inégalité de Markov à $\exp(\theta\, X)$ pour $\theta > 0$, montrer que pour $x \geq m$, $P(X \geq x) \leq \exp(-\Lambda^*(x))$, puis que pour $x \leq m$, $P(X \leq x) \leq \exp(-\Lambda^*(x))$.

(h) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même mesure de probabilité P_X que X. On définit la moyenne empirique de $(X_1, \cdots, X_n)$ par :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Rappeler le comportement asymptotique de $\overline{X_n}$.

(i) Soit Λ_n la log-Laplace de $\overline{X_n}$ et Λ_n^* la transformée de Legendre de Λ_n. Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\Lambda_n(\theta) = n\Lambda(\theta/n)$, puis que :

$$\begin{aligned} P(\overline{X_n} \geq x) \leq \exp(-n\,\Lambda^*(x)) \quad &\text{si} \quad x \geq m; \\ P(\overline{X_n} \leq x) \leq \exp(-n\,\Lambda^*(x)) \quad &\text{si} \quad x \leq m. \end{aligned}$$

Que peut-on en déduire sur la convergence de $\overline{X_n}$? Comparer un tel résultat avec celui obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, puis celui obtenu avec le Théorème de la limite centrale (en supposant $\mathbb{E}(X^2) < \infty$).

3. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (de mesure de probabilité P_X) sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que P_X est absolument continue par rapport à la mesure de μ, de densité f_X.

   (a) Montrer que la mesure de probabilité de $X + Y$ est absolument continue par rapport à μ (justifier !) et de densité $f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t)\, f_X(x-t)\, d\mu(t)$.

   (b) Après avoir préciser la mesure μ correspondante, calculer f_{X+Y} dans le cas où : 1/ X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$; 2/ X suit une loi uniforme sur $[0,1]$.