Mesure et Intégration

Examen Terminal - Février 2002

Examen sans document de 3h00

Les trois exercices suivants sont indépendants. De même, les différentes questions de chaque exercice sont le plus souvent indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'espace mesurable $(]0,+\infty[,\mathcal{B}([0,+\infty[)$ et P une application sur $(]0,+\infty[,\mathcal{B}([0,+\infty[)$ telle que pour $A \in \mathcal{B}([0,+\infty[$,
$$P(A) = \int_A \beta \exp(-\beta\, x) d\lambda(x), \quad \text{avec} \quad \beta > 0,$$
et λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit X l'application telle que pour $\omega \in [0,+\infty[$, $X(\omega) = \alpha \exp(\omega)$, avec $\alpha > 0$.
   (a) Donner l'exemple d'un ensemble A de $\mathcal{B}([0,+\infty[)$ et calculer $P(A)$.
   (b) Montrer que P est une mesure de probabilité sur $([0,+\infty[,\mathcal{B}([0,+\infty[)$.
   (c) Montrer que X est une variable aléatoire dont on précisera l'ensemble des valeurs possibles.
   (d) Déterminer $X^{-1}([2,3])$, puis $X^{-1}(\mathcal{B}([2,3]))$.
   (e) Déterminer la fonction de répartition F_X associée à X. En déduire la mesure de probabilité de X et exprimer sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
   (f) Calculer $\mathbb{E}X$ et var$X$ en précisant les conditions requises pour que ces moments soient finis.

2. Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que la loi de probabilité de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et de densité f.
   (a) Exprimer en fonction de f et de λ la fonction de répartition F_X de X. Si on suppose que $f(x) = f_c(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer F_X.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $X_n = X.\mathbb{I}_{|X|\leq n}$. Pour n fixé, quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X_n ? Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite de variables aléatoires.
   (c) Soit F_n la fonction de répartition de X_n pour n fixé. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$F_n(x) = F(x)\, \mathbb{I}_{x\in[-n,n[} + \mathbb{I}_{x\geq n}.$$
Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$. Déterminer la mesure de probabilité P_{X_n} de X_n. Donner un exemple de densité f telle que P_{X_n} soit absolument continue par rapport à λ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} X$, puis que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$.

(e) Montrer que pour tout $p > 0$, $X_n \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas où $f = f_c$, calculer explicitement $\mathrm{var} X_n$.

(f) Montrer que s'il existe $q > 0$ tel que $X \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^q} X$. Dans le cas où $f = f_c$, pour quelles valeurs de q cette convergence a-t-elle lieu ?

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi P_X (à laquelle est associée la fonction de répartition F_X). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction de répartition empirique de $(X_1, \cdots, X_n)$ par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{X_i \leq x} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Rappeler l'expression de F_X lorsque P_X est une loi binomiale de paramètre $(3, 1/3)$ et lorsque P_X est la loi gaussienne centrée réduite.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}F_n(x)$ en fonction de F_X.

(c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} F(x)$.

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ vérifie un théorème de limite centrale que l'on établira.

(e) On suppose que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont plus indépendants. A partir d'un contre-exemple, montrer que les convergences précédentes n'ont plus lieu en général.