Université Paul Sabatier
Maîtrise d'Ingénieurie Mathématique

Année Universitaire 1999/2000

Module MIM07
Séries Chronologiques

Devoir de 1 heure 30. Tout document est interdit.

1. On considère la série chronologique $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que:

$$X_k = \left(\cos(\frac{\pi}{2}k) + \varepsilon_k\right)^2 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

avec $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

   (a) Écrire X sous la forme $X_k = a(k) + s(k) + u_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, où
   - $a(.)$ est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ appelée tendance de X.
   - $s(.)$ est une fonction périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ de période T à déterminer vérifiant $\sum_{j=1}^{T} s(j) = 0$ et appelée saisonnalité de X.
   - $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires centrées.

   (b) X est-elle une série chronologique stationnaire?

   (c) Calculer la variance de X_k pour $k \in \mathbb{Z}$.

   (d) Déterminer un filtre linéaire non nul rendant la série chronologique X sans tendance ni saisonnalité. Si Y est la série filtrée, Y est-elle un bruit blanc?

2. On considère deux séries chronologiques stationnaires indépendantes $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$X_k = \rho_1 X_{k-1} + u_k, \qquad \text{avec } 0 < |\rho_1| < 1, \tag{1}$$
$$Y_k = \rho_2 Y_{k-1} + v_k, \qquad \text{avec } 0 < |\rho_2| < 1, \tag{2}$$

où $u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont deux bruits blancs gaussiens indépendants de variances respectives σ_u^2 et σ_v^2. Soit enfin $Z = (Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$Z_k = X_k + Y_k.$$

   (a) On suppose que $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une série chronologique gaussienne centrée stationnaire telle que $\mathbb{E}M_k^2 = \alpha > 0$, $\mathbb{E}M_k M_{k+1} = \beta$ et $\mathbb{E}M_k M_{k+i} = 0$ pour $i \geq 2$. Montrer que $|\beta| < \alpha$. Montrer que M est un processus MA[1] et donner son écriture à l'aide d'un bruit blanc gaussien $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dont vous préciserez la variance.

(b) Si $\rho_1 = \rho_2$, quel type de processus est Z?

(c) Si $\rho_1 \neq \rho_2$, montrer que Z est un processus ARMA[2,1] dont vous donnerez l'écriture (on pourra s'aider de la première question).

(d) Quelle relation doivent satisfaire ρ_1, ρ_2, σ_u^2 et σ_v^2 pour que Z soit un AR[2]?