Devoir de Mathématiques

Algèbre linéaire - Octobre 2000

1. Soit $e = (i, j, k)$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la famille d'applications linéaires f_a, qui a tout vecteur u de coordonnées (x,y,z) dans e, associe un vecteur u' de coordonnées (x',y',z') dans e, tel que:

$$\begin{cases} x' = (3+a)x + (a-5)y - 2az \\ y' = -ax + (a-2)y + az \\ z' = 5x - 5y - 2z \end{cases}$$

   (a) On suppose ici que $a = 0$.

      i. Déterminer le rang de f_0, puis en déduire $Kerf_0$ et Imf_0. Donner, après avoir justifier son existence, l'expression de f_0^{-1} dans e.

      ii. Soient les vecteurs (b_1, b_2, b_3), tels que:

$$\begin{cases} b_1 = i + j \\ b_2 = k \\ b_3 = i + k \end{cases}$$

      Montrer que $b = (b_1, b_2, b_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer la matrice de passage P de e dans b. Si u a pour coordonnées (x,y,z) dans e, quelles seront ses coordonnées (X,Y,Z) dans b?

      iii. En déduire les coordonnées (X',Y',Z') de u' image de u (X,Y,Z) par f_0 (les coordonnées étant exprimer dans b). Exprimer la matrice de f_0 dans b.

      iv. En déduire l'expression matricielle de $f_0^2 = f_0 o f_0$ et de f_0^5 dans b.

   (b) On suppose maintenant que a est un réel quelconque.

      i. Déterminer, en fonction de a, le rang de f_a, puis en déduire $Kerf_a$ et Imf_a.

      ii. Donner, lorsque cela est possible, l'expression de f_a^{-1} dans e.

2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et soit $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à n (pour $n \in \mathbb{N}$). On considère l'application ϕ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dans E, telle que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = Q$ avec $Q(X) = P(1 - X)$.

   (a) Donner la base canonique $e^{(n)}$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et en déduire la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Montrer que ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Calculer $\phi_{n0}\phi_n(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$. En déduire que ϕ_n est bijective.

(d) Déterminer la matrice de ϕ_n dans $e^{(n)}$.

(e) Pour k tel que $0 \leq k \leq n$, on note Q_k les polynômes $Q_k(X) = (X - 1/2)^k$. Montrer que $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de ϕ_n dans $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$.