Devoir de Mathématiques

Analyse numérique - Mars 2001

1. **(Partiel de mars 1999) (**)** Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. On pourra utiliser le résultat suivant (sans avoir à le démontrer) :

   La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente.*

   On va s'intéresser aux convergences de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ et de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} - 1 = 2i.e^{\frac{ix}{2}}.\sin(\frac{x}{2})$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k) = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}).\sin(\frac{n}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) est-elle bornée?

   (b) Déterminer $u_{n+1} - u_n$. Montrer que $S_n = \dfrac{u_n}{n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{u_k}{k(k+1)}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ converge. En déduire que S est convergente.

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ existe. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(t)dt$ existe. En déduire que I existe.

   (d) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(2t)}{t}dt$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \dfrac{\sin^2(t)}{t}dt$ n'existe pas. En déduire que I est semi-convergente.

2. **(Partiel de novembre 1998) (***)** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^3)^n}$.

   (a) Montrer que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer u_1.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 (on pourra majorer u_n en utilisant le fait que $4(1+t^3) > (1+t)^3$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, puis faire le changement de variable $u = (1+t)^{3n}$).

(c) Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3n} u_n$ pour $n \geq 1$ (on utilisera une intégration par parties et le fait que $t^3 = t^2.t$).

(d) Montrer que $\sum u_n$ est divergente.

(e) Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge. Que doit valoir N pour que $\sum_{n=1}^{N} (-1)^n u_n$ soit une approximation à 10^{-3} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$?