Devoir de Mathématiques

Statistiques et Probabilités - Décembre 2000

1. **(Examen de janvier 1999)** Le but de cet exercice est d'étudier suivant différentes perspectives statistiques et probabilistes une expérience aléatoire. Cette expérience est la suivante: on jette deux dés équilibrés et on note X le nombre indiqué par le premier dé et Y le nombre indiqué par le second dé. On note Z la somme de ces deux nombres.

   (a) On considère X, Y et Z comme des variables aléatoires discrètes.

      i. Donner les lois de probabilités de X et de Z sous forme de tableaux. Déterminer les espérances et variances de X et Z.

      ii. On suppose que l'on a obtenu $Z = 3$. Quelle est alors la probabilité que $X = 2$? Les événements $Z = 3$ et $X = 2$ sont-ils indépendants?

   (b) On considère maintenant que X et Y sont deux variables aléatoires continues indépendantes identiquement distribuées, de loi uniforme sur $[1, 7]$. On pose $Z = X + Y$.

      i. Que vaut $P(X = 7)$?

      ii. Déterminer l'espérance et la variance de X (refaire les calculs...on rappele que la fonction de densité de X est $f_X(x) = 1/6$ si $x \in [1, 7]$, 0 sinon).

      iii. La fonction de densité de Z est: $f_Z(x) = \dfrac{x-2}{36}$ si $x \in [2, 8]$, $f_Z(x) = \dfrac{14-x}{36}$ si $x \in [8, 14]$ et 0 sinon). Donner l'espérance et la variance de Z. Déterminer la fonction de répartition $F_Z(.)$.

   (c) On a effectué 20 fois l'expérience précédente et on note x_i et z_i les valeurs de X et Z pour la ième expérience. On obtient le tableau suivant:

x_i	6	2	4	3	6	5	3	1	5	3	4	5	6	5	2	3	6	6	3	6
z_i	7	5	9	4	7	7	5	5	7	5	5	10	9	11	5	6	12	10	5	11

      i. Déterminer les moyennes et écarts-types de X et de Z. Représenter les z_i par un histogramme comportant les classes: $[2, 5[$, $[5, 8[$, $[8, 11[$, $[11, 12]$. En déduire la médiane des z_i.

      ii. Représenter le nuage de points (x_i, z_i). Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de Z par X, et tracer la sur le nuage précédent. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Une régression vous semble-t-elle légitime?

2. **(Examen de janvier 2000)** Des bombes sont lâchées depuis un avion. Pour chacune d'elle, on a mesuré la durée T pour atteindre le sol et l'altitude de l'avion H donnée par un altimètre.

   (a) Dix bombes ont été lâchées. On a obtenu les résultats suivants:

t_i en secondes	31.6	30.5	28.0	32.7	30.6	33.0	32.3	28.6	27.4	29.9
h_i en mètres	4920	4503	3849	5202	4608	5350	5095	3916	3690	4445

i. Déterminer les moyennes et écarts-types des t_i et des h_i. Déterminer la médiane des t_i.

ii. Représenter le nuage de points (t_i, h_i). Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de H par T, et tracer là sur le nuage précédent. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Une régression vous semble-t-elle légitime?

iii. Soit $U = T^2$. Calculer la moyenne et l'écart-type de U. Représenter le nuage de points (u_i, h_i). Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de H par U, et tracer là sur le nuage précédent. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Pourquoi cette régression est-elle plus adéquate que la première?

iv. Donner deux estimations du temps de chute d'une hauteur de 6000 mètres à l'aide des régressions précédentes. Laquelle est la plus crédible?

(b) On considère T comme une variable aléatoire continue. On modèlise T par une loi normale de moyenne 30 et de variance 4. On note $\phi(x)$ la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite Z (Rappel: $\phi(x) = P(Z \leq x)$).

i. Calculer $P(T > 34)$ et $P(T \in [29, 31])$. Déterminer ζ tel que $P(T \leq \zeta) = 0.4$.

ii. Soit T' la variable aléatoire définie par $T' = k$ quand $T \in [k, k+1[$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Quel est l'ensemble des valeurs de T'? Exprimer la loi de probabilité de T' en fonction de ϕ. Calculer $P(T' = 29)$, $P(T' = 29 | T > 30)$ et $P(T' = 29 | T < 29)$.

iii. Soit $U = 5T^2$. Quelles sont les valeurs possibles pour U? Déterminer (sans gros calculs...) l'espérance de U.

iv. On dit que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont indépendantes lorsque pour tous intervalles $(I, J) \subset \mathbb{R}^2$,

$$P(X \in I)P(Y \in J) = P((X \in I) \cap (Y \in J)).$$

Soit $I = [0, 30]$. Déterminer un intervalle J tel que $P((T \in I) \cap (U \in J)) = 0$ (sans calcul). En déduire que T et U ne sont pas indépendantes.

v. Soit $u \in \mathbb{R}$. Suivant les valeurs de u, exprimer $F(u) = P(U \leq u)$ en fonction de ϕ et de u. Calculer $P(U \in [3000, 5000])$.