MATHEMATIQUES : UEF05 : Analyse

Plan du cours d'ANALYSE

1 Suites de nombres complexes

1.1 Définitions -Propriétés

Définition. • Suites numériques.

- Suites récurrentes.
- Suites convergentes, divergentes, limite.
- Suites de Cauchy.

Exemple. Suites arithmétiques et géométriques dans $\mathbb{C}$.

Propriété. (Suite convergente) $\Leftrightarrow$ (Suite de Cauchy)

Définition. • Suites croissantes, décroissantes.

- Suites majorées, minorées, bornées.

Théorème. Une suite réelle bornée et monotone converge.

1.2 Etude de la convergence d'une suite

Définition. • Sous-suites.

- Valeurs d'adhérence d'une suite

Propriété. Toute valeur d'adhérence d'une suite est limite d'une de ses sous-suites.

Définition.

- Suites équivalentes.
- Suites négligeables.
- Suites bornées par une autre suite.

Propriété.

- Les suites équivalentes ont même nature.
- Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \to 0$ alors $u_n \to 0$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge alors $u_n \to 0$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n.u'_n \sim v_n.v'_n$ mais **pas** $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$.

1.3 Etude d'une suite récurrente

On s'intéresse à la suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0\mathbb{R}$.

1. Etude de la fonction f et détermination de $I = f(\mathbb{R})$.
2. Si f est croissante sur I, alors (u_n) est décroissante si $u_1 \leq u_0$ et (u_n) est croissante si $u_1 \geq u_0$ (en supposant $u_0 \in I$).
3. Si (u_n) est convergente alors sa limite l est une des solutions de l'équation $l = f(l)$.
4. Si $\sup_{x\in I} |f'(x)| < 1$ alors (u_n) converge vers $l_0 \in I$, unique solution de $f(l_0) = l_0$ (Théorème du point fixe).

2 Séries de nombres complexes

2.1 Définitions -Propriétés

Définition.

- Série, somme partielle et somme de série.
- Série convergente, divergente.
- Reste de série, série tronquée.

Exemple. Suites arithmétiques et géométriques dans $\mathbb{C}$.

Propriété. Une série tronquée à même nature que la série non tronquée.

Propriété. Série convergente $\Rightarrow$ Terme général $\to 0$.

Remarque. La réciproque est fausse.

Conséquence. Série convergente $\Rightarrow$ Reste $\to 0$.

2.2 Séries à termes positifs

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $u_k \geq 0$.

Propriété. S_n est croissante et si S_n bornée alors S_n converge.
Si S_n ne converge pas alors la série diverge vers $+\infty$.

Théorème. Théorèmes de comparaison

- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème. Critère de Cauchy Si $(u_n)^{1/n} \to l$ quand $n \to +\infty$:

- Si $l < 1$, la série converge.
- Si $l > 1$, la série diverge.
- Si $l = 1$, on ne peut rien dire.

Théorème. Critère de d'Alembert Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ quand $n \to +\infty$:

- Si $l < 1$, la série converge.
- Si $l > 1$, la série diverge.
- Si $l = 1$, on ne peut rien dire.

Théorème. Théorème de comparaison avec une intégrale
Si $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f décroissante et intégrable, alors:

- $\sum u_n$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \int_1^{n} f(t)dt$.

Théorème. Critère de Riemann Si il existe α tel que: $n^\alpha u_n \to l$ quand $n \to +\infty$, alors:

- Si $l > 0$ et $\alpha \leq 1$, la série diverge.
- Si $l < +\infty$ et $\alpha > 1$, la série converge.

Exemple. Séries de Riemann.

Théorème. Règle de Duhamel Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1 - \dfrac{\alpha}{n}$ quand $n \to +\infty$:

- Si $\alpha < 1$, la série diverge.
- Si $\alpha > 1$, la série converge.

2.3 Séries absolument et semi-convergentes

Définition.
- Série absolument convergente.
- Série semi-convergente.

Propriété. Série absolument convergente $\Rightarrow$ Série convergente.

Remarque. La réciproque est fausse.

Propriété. Si $u_n \sim v_n$ alors $(\sum u_n$ abs. conv.$) \iff (\sum v_n$ abs. conv.$)$

Propriété. Si u_n et v_n sont telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ abs. conv. alors:

- $\sum(u_n + v_n)$ est absolument convergente.
- $\sum u_n . \sum v_n = \sum c_n$ est absolument convergente.

Définition. Série alternée.

Théorème. Critère de convergence des séries alternées Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante et convergeant vers 0. Alors:

- $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.
- $|R_n| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \le u_n$.

Remarque. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ semi-convergente alors **on n'a pas forcément** $\sum v_n$ convergente.

Exemple. Utilisation de Developpements Limités.

3 Intégrales généralisées (impropres)

3.1 Rappels sur les intégrales simples

Définition.
- Intégrale comme aire algébrique.
- Intégrale à partir de sommes de Darboux.
- Sommes de Riemann.

Proposition. Si f continue sur $[a, b]$ alors f intégrable sur $[a, b]$.

Proposition. Si f intégrable admet F pour primitive sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

3.2 Convergence d'une intégrale généralisée

Définition.
- Fonction localement intégrable.
- Intégrale convergente, divergente.

Théorème. Critère de convergence de Cauchy Si f localement intégrable sur $[a,b[$ (b pouvant être ∞), alors: $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\forall\varepsilon>0$, $\exists c\in[a,b[$ tel que $\forall(x,x')\in[c,b[^2$, $\displaystyle\left|\int_x^{x'} f(t)dt\right|\leq\varepsilon$.

Conséquence. Si f localement intégrable sur $[a,b[$ alors si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Remarque. La réciproque est fausse.

Définition. • Intégrale absolument convergente.

• Intégrale semi-convergente.

Théorème. Théorèmes de comparaison Soient f et g localement intégrables sur $[a,b[$.

- Si $f\sim g$ en b, alors ($\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ absolument convergente) $\Longleftrightarrow$ ($\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ absolument convergente). **(faux avec semi-convergence)**
- Si $0\leq f\leq g$ sur $[a,b[$, alors ($\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergente) $\Longrightarrow$ ($\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ convergente).
- Si $0\leq f\leq g$ sur $[a,b[$, alors ($\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ divergente) $\Longrightarrow$ ($\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ divergente).

Conséquence. Si f localement intégrable sur $[a,b[$ avec $b<+\infty$, et si $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe alors f est prolongeable par continuité en b et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Conséquence. Si f localement intégrable sur $[a,+\infty[$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Remarque. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ peut converger même si f non bornée en $+\infty$.

3.3 Calcul des intégrales généralisées

Propriété. Si f et g sont localement intégrables sur $[a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergent alors :

1. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda.f(t)dt=\lambda\int_a^b f(t)dt$.

2. Si $\int_a^b g(t)dt$ est absolument convergente, $\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
3. $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ et $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ (Chasles).
4. Si $f \geq g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.
5. Si $\int_a bf(t)dt$ est absolument convergente, $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Les méthodes de calcul utilisées pour les intégrales définies peuvent être reprises en rajoutant certaines conditions. On suppose que f est localement intégrables sur $[a,b[$ et que $\int_a bf(t)dt$ converge :

1. Utilisation d'une primitive: $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$.
2. Intégration par parties: on a $\int_a^b u(t).v'(t).dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)dt$ si $[u(t).v(t)]_a^b$ et $\int_a^b u'(t).v(t)dt$ existent.
3. Changement de variable: $\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\lim_{x\to b}\phi^{-1}(x)} \phi'(t).f(\phi(t))dt$ où ϕ est une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\phi^{-1}(a), \lim_{x\to b}\phi^{-1}(x)[$.

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Suites de fonctions

Définition. • Suite de fonctions.

- Convergence simple.
- Convergence uniforme.

Propriété. (Convergence uniforme) $\Longrightarrow$ (Convergence simple)

Remarque. La réciproque est fausse (contrexemple: $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$).

Théorème. Théorème de continuité Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur A, qui convergent uniformément vers f sur A, alors f continue sur A.

Remarque. La continuité étant locale, f est continue en x_0 si les f_n sont continues et converge uniformément sur un intervalle contenant x_0.

Théorème. Théorème d'intégration Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, qui convergent uniformément vers f sur $[a,b]$, alors:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Théorème. Théorème de dérivation Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et si:

- Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge simplement,
- Les (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$,

alors (f_n) converge simplement vers f sur $[a,b]$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que $f' = g$ soit $(\lim_{n\to+\infty} f_n)'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

4.2 Séries de fonctions

Définition.
- Série de fonctions.
- Convergence simple.
- Convergence uniforme.
- Convergence normale.

Propriété. (Convergence normale) $\Longrightarrow$ (Convergence uniforme) $\Longrightarrow$ (Convergence simple)

Remarque. La réciproque est fausse.

Propriété. Si $\forall x \in A$, $|f_n(x)| \leq u_n$ et $\sum u_n$ converge alors $\sum f_n(x)$ converge normalement sur A.

Théorème. Théorème de continuité Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur A et si $\sum f_n(x)$ convergent uniformément vers $S(x)$ sur A, alors S continue sur A.

Théorème. Théorème d'intégration Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ et si $\sum f_n(x)$ convergent uniformément vers $S(x)$ sur $[a,b]$, alors:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Théorème. Théorème de dérivation Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et si:

- Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\sum f_n(x_0)$ converge,
- Les $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$,

alors $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et pour $x \in [a,b]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

5 Séries entières

5.1 Rayon de convergence

Définition. • Série entière.

Proposition. Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que:

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ (ou $z = 0$ si $R = 0$) alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R < +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ alors $a_n z^n$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ et $\sum a_n z^n$ diverge.

Définition. • Rayon de convergence.

- Disque de convergence.

Théorème. Lemme d'Abel

1. Si il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $a_n z_0^n$ est bornée alors $R \geq |z_0|$.
2. Si il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ diverge alors $R \leq |z_1|$.

Théorème. Règle de Cauchy Si $\lim_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n} = l$ avec $l \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{l}$ (en notant $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Théorème. Règle de d'Alembert Si $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ avec $l \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{l}$ (en notant $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Propriété. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b.

1. $\sum (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$.
2. $\sum c_n z^n = \sum a_n z^n \times \sum b_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est une série entière de rayon de convergence $R' \geq \min(R_a, R_b)$.

5.2 Propriété de la somme d'une série entière

Propriété. Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge uniformément sur tout disque de rayon $\rho < R$ (càd sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| \leq \rho\}$)..

Théorème. Théorème de continuité La somme d'une série entière est continue sur $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < R\}$.

Théorème. Théorème d'intégration On peut intégrer terme à terme une série entière de somme $S(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ sur tout intervalle inclus dans $]-R, R[$ et en particulier

$$\forall x \in]-R, R[, \int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \text{ série de rayon } R.$$

Théorème. Théorème de dérivation Si $S(x) = \sum a_n x^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$, $S'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$, série de rayon R.

Corollaire. Plus généralement, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$, $S^{(k)}(x) = \sum n(n-1)..(n-k+1) a_n x^{n-k}$, série de rayon R.

5.3 Développement en série entière

Définition. • Fonction développable en série entière.

Théorème. Si $f(x) = \sum a_n x^n$ pour $x \in]-\rho, \rho[$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\rho, \rho[$ et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (série de Taylor).

Théorème. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\rho, \rho[$ et si il existe deux constantes $K > 0$ et $A > 0$ telles que $\forall x \in]-\rho, \rho[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on ait $\dfrac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq A.K^n$ alors f est développable en série entière et $f(x) = \sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarque. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\rho, \rho[$ n'est pas forcément développable en série entière: par ex. $f(x) = \exp(-\dfrac{1}{x^2})$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Exemple. Fonctions e^x, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$, etc..

Applications: Résolution d'équations différentielles, calcul de séries, étude de fonction, calcul d'intégrales,...

6 Séries de Fourier

6.1 Introduction

Exemple. (Physique)

- Oscillations d'une corde.
- Conduction de la chaleur.

Exemple. (Mathématique)

- Approximation d'une fonction périodique par des polynômes trigonométriques.
- Vision algébrique de l'espace des fonctions périodiques (base orthonormale, projection,...).

6.2 Coefficients de Fourier

Définition. • Coefficients de Fourier complexes: $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

- Polynôme trigonométrique d'ordre n: $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$.

- Coefficients de Fourier réels: $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Polynôme trigonométrique d'ordre n:
$S_n(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$.

Propriété. Si f est périodique de période T, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \int_x^{x+T} f(t)dt$.

Propriété. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\begin{cases} a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) \\ b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f) \end{cases}$.

Propriété.
- si f est paire, on a $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$.
- si f est impaire, on a $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

Proposition. Si f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $[-\pi, \pi[$, alors les séries $\sum(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2)$, $\sum |a_k(f)|^2$ et $\sum |b_k(f)|^2$ sont convergentes.

Conséquence. Théorème de Riemann-Lebesgue Si f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $[-\pi, \pi[$, alors $a_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $b_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

6.3 Convergence des séries de Fourier

Définition.
- La série de Fourier associée à f est
$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)).$$
- Fonction 2π-périodique développable en série de Fourier.

Théorème. Théorème de Dirichlet Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi[$ alors:

1. La série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $S(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Théorème. Si f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi[$ alors:

1. Les séries $\sum(|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|)$, $\sum |a_k(f)|$ et $\sum |b_k(f)|$ sont convergentes.
2. La série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément) vers f sur $\mathbb{R}$.

Théorème. Théorème de Bessel Si f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $[-\pi, \pi[$ alors:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

6.4 Fonctions T-périodiques

Mêmes résultats avec:

- $c_n(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt.$
- $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{i\frac{2\pi}{T}kx}.$
- $a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)dt$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\frac{2\pi}{T}nt)dt.$
- $S_n(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(\frac{2\pi}{T}kx) + b_k(f)\sin(\frac{2\pi}{T}kx)).$