MATHÉMATIQUES : UEF03 : Algébre

Plan du cours d'ALGEBRE

1 Espaces vectoriels

1.1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition. $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (e.v.) si
$(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire:

- $\forall u, v \in E, \quad u + v = v + u.$
- $\forall u, v, w \in E, \quad u + (v + w) = (u + v) + w.$
- $\exists 0_E \in E$ ("vecteur nul de E"), $\forall u \in E, \quad u + 0_E = u.$
- $\forall u \in E, \ \exists v \in E, \quad u + v = 0_E.$

et la multiplication par un scalaire, $\lambda \cdot u \in E$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, vérifie:

- $\forall u \in E, \quad 1 \cdot u = u.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u, v \in E, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall u \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u.$

Exemple. Vecteurs du plan, de l'espace, de $\mathbb{R}^n$, de fonctions, de polynômes...

Définition. $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) si muni des mêmes lois, $(F, +, \cdot)$ reste un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ce qui s'avère vrai si et seulement si:

$$\begin{cases} 0_E \in F \\ \text{et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u, v \in F, \quad \lambda \cdot u + v \in F. \end{cases}$$

Exemple. Droites, plans vectoriels...

Propriété. L'intersection de deux s.e.v. est un s.e.v.

Définition. • Somme de sous-espaces vectoriels.
Soit $F_1, \ldots, F_n$ n s.e.v. de E, leur somme $F_1 + \ldots + F_n$ est l'ensemble des vecteurs $v \in E$ pouvant s'écrire $v = u_1 + \ldots + u_n$, où $u_i \in F_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Ce sous-ensemble de E s'avère être aussi un s.e.v. de E.

- Combinaison linéaire de vecteurs.
  Soit $H \subset E$ un sous-ensemble de vecteurs. Le vecteur $v \in E$ est une combinaison linéaire de vecteurs de H si il peut s'écrire

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i,$$

  où $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $u_i \in H$ pour $i = 1, \ldots, n$.
  A l'usage le $\cdot$ est souvent omis et on écrit $v = \sum \alpha_i u_i$.

- Sous-espace engendré.
  H étant un sous-ensemble quelconque de vecteurs, l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de H s'avère être un s.e.v. de E, noté $< H >$ et appelé sous-espace engendré par H.

Propriété.
Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n s.e.v. de E, alors $E_1 + \ldots + E_n =< E_1 \cup \ldots \cup E_n >$.

Définition. • Somme directe de s.e.v.
Soit $F_1, \ldots, F_n$ n s.e.v. de E. Si pour tout $v \in F_1 + \ldots + F_n$, il existe un unique n-uplet $(u_1, \ldots, u_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n$ (et non seulement au moins un, comme dans la définition ci-dessus de la somme simple) tel que $v = u_1 + \ldots + u_n$, on dit que $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe, ce qui se précise en remplaçant $F_1 + \ldots + F_n$ par $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$.

- Sous-espaces supplémentaires.
  Si $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n = E$ alors $F_1, .., F_n$ sont des s.e.v. supplémentaires de E.

Propriété. Cas $n = 2$.
Deux s.e.v. F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

1.2 Bases d'un espace vectoriel en dimension finie

Définition. Dimension finie.
Un e.v. E est dit de dimension finie s'il peut être engendré par un nombre fini de vecteurs, soit $E =< H >$ pour H fini.
Il est alors plus pratique de décrire ces ensembles H par des familles (finies) $(u_1, \ldots, u_n)$.

Définition. • Le s.e.v. engendré par une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est l'ensemble des vecteurs $v \in E$ pouvant s'écrire $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Il s'écrit $< u_1, \ldots, u_n >$ et correspond à $< \{u_1, \ldots, u_n\} >$ avec la définition de $< H >$ ci-dessus.

- On dit aussi que la famille est génératrice d'un s.e.v. F quand F est son s.e.v. engendré, et simplement génératrice quand elle engendre tout l'e.v. E.
- Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite libre si, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ étant un n-uplet de réels,
$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$
- Une famille de vecteurs libre et génératrice est une base.

Propriété. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. Pour tout $v \in E$, il existe un unique n-uplet de réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$. Ces $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sont les coordonnées de v dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$.

Proposition. Dimension d'un e.v. Soit E un e.v. de dimension finie.

- E admet des bases et elles ont toutes le même cardinal n, qui est appelé la dimension de E: $n = \dim E$.
- Une famille libre de E est alors constituée au plus de n vecteurs.
- Une famille génératrice de E est constituée au moins de n vecteurs.
- Une famille de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si elle est libre ou elle est génératrice de E.

Tout le langage défini ici pour un e.v. E s'applique aussi à un s.e.v. puisqu'un s.e.v. est lui-même un e.v.

Propriété. Soit E un e.v. de dimension finie.

- Si F est un s.e.v. de E alors $\dim F \leq \dim E$.
- Si F est un s.e.v. de E et $\dim F = \dim E$ alors $E = F$.
- Si E_1 et E_2 sont des s.e.v. de E, alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

Définition. Rang d'une famille de vecteurs.
Le rang d'une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est la dimension du sous-espace $F =< u_1, \ldots, u_n >$ qu'elle engendre. On peut calculer ce rang en éliminant des vecteurs de cette famille jusqu'à ce qu'elle soit libre. En effet, si $u_n \in < u_1, \ldots, u_{n-1} >$, alors $F =< u_1, \ldots, u_n > = < u_1, \ldots, u_{n-1} >$, et si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre, alors son rang est n.

2 Applications linéaires

2.1 Définitions - Propriétés

Définition. • Application linéaire de E dans F.
Soit E et F deux e.v. Une application f de E dans F est dite linéaire si elle vérifie
$$\begin{cases} \forall u, v \in E, & f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \text{et } \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E, & f(\lambda u) = \lambda f(u). \end{cases}$$

En pratique, on peut vérifier ces deux propriétés simultanément en vérifiant que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in E$, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, E)$, on dit que f est un endomorphisme de E.

Exemple. Homothéties de rapport $\mu \in \mathbb{R}$: $f(u) = \mu u$.
Projecteurs: Si $E = F \oplus G$, alors la projection p sur F parallèlement à G est l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $v \in E$ associe $p(v) = u_1$, où u_1 est déterminé ainsi: Comme la somme est directe, v s'écrit de manière unique $v = u_1 + u_2$ où $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$.

Propriété.

- Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g_O f \in \mathcal{L}(E, G)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et f bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A s.e.v. de E alors $f(A) = \{v \in F \ ; \ \exists u \in A, f(u) = v\}$ est un s.e.v. de F.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et B s.e.v. de F alors $f^{-1}(B) = \{u \in E \ ; \ \exists v \in B, f(u) = v\}$ est un s.e.v. de E.

2.2 Noyaux et Images

Définition. Noyau et image d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le noyau $\ker f$ est le s.e.v. (voir propriété ci-dessus) $f^{-1}(\{0_F\})$, c'est-à-dire $u \in \ker f \Leftrightarrow f(u) = 0_F$.
- L'image $\mathrm{Im} f$ est le s.e.v. $f(E)$.

Proposition. Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\quad (f \text{ injective}) \Longleftrightarrow (\ker f = \{0_E\})$.

Cas de la dimension finie

Propriété. Soit E et F deux e.v. de dimension finie. Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

- $\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim E$ (mais en général, on n'a pas $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = E$).
  La dimension $\dim(\mathrm{Im} f)$ est aussi appelée rang de l'application et notée $\mathrm{rg} f = \dim(\mathrm{Im} f)$.
- Si $\dim E = \dim F$ alors $\quad (f \text{ bijective}) \Longleftrightarrow (\ker f = \{0_E\})$.
- Si e est une base de E, f est entièrement définie par les images des vecteurs de e par f.
  En effet soit $e = (u_1, \ldots, u_n)$, $v \in E$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de v dans e,

  $$f(v) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_n f(u_n).$$

  Donc $f(v)$ est bien déterminé par les $f(u_1), \ldots, f(u_n)$.

3 Matrices et Déterminants

3.1 Définitions et propriétés des matrices complexes

Définition. • Matrice complexe (réelle) d'ordre (n, p).

- Ensemble des matrices complexes (réelles) d'ordre (n, p): $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
- Ensemble des matrices complexes (réelles) carrée d'ordre n: $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Matrices extraites.
- Transposée d'une matrice.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice carrée.

- Matrice symétrique.
- Matrice hermitienne.
- Matrice diagonale.
- Matrice triangulaire supérieure (inférieure).
- Trace d'une matrice.

Propriété. • Addition: soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ alors on définit $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

- Multiplication: soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, alors on définit $A.B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)$, matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$.

Remarque. Attention, même si les matrices A et B sont carrées, on n'a pas en général, $A.B = B.A$.

Propriété. • On a ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$.

- On a $\overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B}$ et $\overline{(A.B)} = \bar{A}.\bar{B}$.

<u>Cas des matrices carrées</u>

Définition. • Matrice identité.

- Matrice inversible.

Propriété. Si A et B sont inversibles alors $A.B$ et $B.A$ sont inversibles et $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Définition. • Matrices semblables.

- Matrices équivalentes.

3.2 Matrices complexes et applications linéaires

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F sont deux e.v. de dimensions finies et de bases respectives $e = (e_1, .., e_p)$ et $f = (f_1, .., f_n)$. On appelle matrice de u dans les bases (e, f) la matrice $Mat(u, e, f) = (m_{ij})$ telle que $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i$ pour tout $j \in \{1, 2, .., p\}$.

Attention! La matrice de u dépend des bases choisies.

Conséquence. Soit x vecteur de E, on associe un vecteur colonne X composé des coordonnées de x dans e et $y = u(x)$ a pour vecteur colonne Y tel que $Y = A.X$.

Propriété. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, où E,F et G sont des e.v. de dimensions finies et de bases respec. e, f et g. Alors $Mat(v_O u, e, g) = Mat(v, f, g).Mat(u, e, f)$.

Définition. Le rang de A, matrice d'ordre (n,p) est le rang de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $A = Mat(u, e, f)$.

Proposition. Soit $e = (e_1, .., e_p)$ et $e' = (e'_1, .., e'_p)$ deux bases d'un e.v. E. Alors il existe une matrice d'ordre p inversible $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ telle que $e'_j = \sum_{i=1}^{p} p_{ij} e_i$ pour tout $i \in \{1, 2, .., p\}$. P est la matrice de passage de e dans e'.

Conséquence. Soit x vecteur de E de vecteur colonne X dans e et de vecteur colonne X' dans e'. Alors $X = P.X'$ soit encore $X' = P^{-1}.X$.

Conséquence. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat(u, e, e)$, $B = Mat(u, e', e')$. Alors $B = P^{-1}.A.P$.

3.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition. Déterminant d'une matrice carrée comme somme de diffèrents produits de coefficients de la matrice.

Propriété. Soit A, B matrices carrées d'ordre n.

- $\det({}^tM) = \det(M)$ et $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.
- $\det(A.B) = \det(A)\det(B) = \det(B.A)$.
- On ne change rien au déterminant d'une matrice si on rajoute à une ligne (colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (colonnes).

Définition. Cofacteurs d'une matrice carrée.

Proposition. Le déterminant d'une matrice est la somme des produits 2 à 2 des éléments d'une rangée par les cofacteurs correspondants (et ce pour n'importe quelle rangée).

Propriété. • Soit $A = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$, où M_1, M_2 et M_3 sont des matrices carrées. Alors $\det(A) = \det(M_1)\det(M_3)$.

- Soit A matrice diagonale ayant sur sa diagonale les complexes $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$. Alors $\det(A) = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$.

3.4 Applications

Déterminant de n vecteurs:

Définition. Déterminant de n vecteurs dans une base e d'un e.v. E tel que $\dim E = n$ comme déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs.

Propriété. On considère des vecteurs d'un e.v. E tel que $\dim E = n$.

- Le déterminant de n vecteurs ne dépend pas de la base choisie.
- On a $(x_1, .., x_n)$ base de $E \Longleftrightarrow \det(x_1, .., x_n) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme:

Définition. Déterminant d'un endomorphisme de E, e.v. de dimension finie, comme déterminant de $Mat(u, e)$, où e base de E.

Propriété. • Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

- $\det(v_O u) = \det(u_O v) = \det(u)\det(v)$.

Proposition. Le rang d'un endomorphisme u est l'ordre de la plus grande matrice extraite de $Mat(u, e)$ dont le déterminant est non nul (e base quelconque). C'est aussi le rang de la matrice $Mat(u, e)$.

Inverse d'une matrice:

Définition. Comatrice d'une matrice carrée.

Proposition. Soit A matrice carrée d'ordre n. Alors $A.{}^tCom(A) = \det(A)I_n$.

Cas particulier. Si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^tCom(A)$.

4 Diagonalisation

4.1 Vecteurs et valeurs propres

Définition. • Vecteurs et valeurs propres.

- Spectre des valeurs propres.
- Sous-espace propres associé à une valeur propre.

- Endomorphisme diagonalisable.

Propriété. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un e.v. Soit $Id \in \mathcal{L}(E)$, application identité telle que $\forall x \in E$, $Id(x) = x$. Alors le s.e.v. propre associé à une valeur propre λ de u est $E_\lambda = \ker(\lambda Id - u)$.

Proposition. Les sous-espaces propres sont en somme directe.

4.2 Cas de la dimension finie et polynôme caractéristique

Définition. Vecteurs et valeurs propres d'une matrice d'ordre n.

Propriété. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un e.v. de dimension finie. Soit M la matrice de u dans une base quelconque de E. Alors les vecteurs et valeurs propres de M sont les mêmes que ceux de u.

Définition. Polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un e.v. de dimension n, $\chi_u(X) = \det(XId - u)$, ou d'une matrice M d'ordre n: $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

Propriété. λ est une valeur propre de u si et seulement si le polynôme caractéristique de u s'annule en λ.

Propriété. Si M est une matrice d'ordre n, alors le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ est un polynôme de degré n, de coefficients 1 pour le degré n, $-Tr(M)$ pour le degré $n-1$ et $(-1)^n \det(M)$ pour le degré 0.

Conséquence. Le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ admet au moins une racine et au plus n dans $\mathbb{C} \Longrightarrow M$ admet au plus n valeurs propres dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Propriété.
- Si A est une matrice carrée, $\chi_A = \chi_{{}^tA}$.
- Si A et B sont deux matrices semblables, $\chi_A = \chi_B$.

4.3 Diagonalisation en dimension finie

Propriété. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un e.v. de dimension finie. Soit M la matrice de u dans une base quelconque de E. Alors (u diagonalisable) $\Longleftrightarrow$ (M semblable à une matrice diagonale, soit $P^{-1}.M.P = D$ avec D diagonale) $\Longleftrightarrow$ (Il existe une base de E dans laquelle M est diagonale).

Propriété. On suppose que χ_u est scindé, soit $\chi_u(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i)^{m(\lambda_i)}$, les λ_i étant les p valeurs propres de u et les $m(\lambda_i)$ leur multiplicité (écriture toujours possible dans $\mathbb{C}$). Alors $1 \leq \dim(E_{\lambda_i}) \leq m(\lambda_i)$.

Théorème. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un e.v. de dimension finie. Alors:
(u diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$)) $\Longleftrightarrow$ ($E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus .. \oplus E_{\lambda_p}$, les λ_i étant les p valeurs propres de u dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$)) $\Longleftrightarrow$ (χ_u est scindé dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) et $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$).

Cas particulier. Si A matrice d'ordre n admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

Technique de diagonalisation en dimension finie:

Soit A une matrice d'ordre n à diagonaliser.

1. On calcule χ_A et on détermine les racines λ_i de χ_A: ce sont les valeurs propres de A.
2. S'il y a n racines λ_i distinctes, alors A est diagonalisable. On détermine une base de vecteurs propres $(X_1, .., X_n)$ en résolvant les n équations $(\lambda_i I_n - A)X_i = 0$.
3. Sinon, pour chaque racine multiple λ_i, on détermine la dimension du s.e.v. propre E_{λ_i} associé à cette racine: cette dimension est $n - rg(\lambda_i I_n - A)$. Si pour toute racine multiple cette dimension est égale à la multiplicité, alors A est diagonalisable (sinon, elle ne l'est pas). Pour chaque racine multiple λ_i, une base de vecteurs propres de E_{λ_i} se trouve en résolvant $(\lambda_i I_n - A)X = 0$.

4.4 Applications de la diagonalisation

Fonctions de matrices

Définition.

- Puissance d'une matrice (d'un endomorphisme).
- Polynôme de matrice (d'un endomorphisme).
- Polynômes annulateurs d'une matrice (d'un endomorphisme).
- Série entière de matrice (d'un endomorphisme).
- Exponentielle de matrice (d'un endomorphisme).

Conséquence. Si A diagonalisable, $A^n = P.D^n.P^{-1}$, avec D^n connue car D diagonale.

Théorème. Théorème de Cayley-Hamilton Le polynôme caractéristique d'une matrice est un polynôme annulateur de cette matrice: $\chi_A(A) = 0$.

Théorème. (A matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) $\Longleftrightarrow$ ($\exists P$ polynôme de $\in \mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$) scindé tel que $P(A) = 0$)

Remarque. Si $P(A) = 0$ avec $P(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$, alors le spectre de A est inclus dans $\{\lambda_i\}_{i=1,..,p}$.

Résolution de systèmes linéaires

1. Systèmes homogènes

   Soit le système S_0 : $\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & .. & + & a_{1p}x_p & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & .. & + & a_{2p}x_p & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & .. & + & a_{np}x_p & = 0 \end{array}\right.$

C'est un système de n équations et p inconnues. On a:

$S_0 \Longleftrightarrow A.X = 0$ avec $\left\{ \begin{array}{ll} A = (a_{ij}) & \text{matrice d'ordre } (n,p). \\ X & \text{vecteur colonne des } x_i. \end{array} \right.$

L'ensemble solution de S_0 est donc un s.e.v. $\mathcal{S}_0 = \{X, A.X = 0\}$. Si u application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans une base quelconque, alors $\mathcal{S}_0 = \ker(u) \Longrightarrow \dim \mathcal{S}_0 = p - rg(A)$ et $rg(A) = r$ est déterminé par l'ordre d'une plus grande matrice carrée A_r extraite de A de déterminant non nul.

Les équations et variables utilisées dans A_r sont appellées **principales** (les autres sont appelées **non-principales** et $\mathcal{S}_0$ s'exprime en écrivant les r variables principales en fonctions des $p-r$ variables non-principales.

2. <u>Systèmes avec second membre</u>

Soit le système S : $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & .. & + & a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & .. & + & a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & .. & + & a_{np}x_p & = b_n \end{array} \right.$

C'est un système de n équations et p inconnues. On a:

$S \Longleftrightarrow A.X = B$ avec $\left\{ \begin{array}{ll} A = (a_{ij}) & \text{matrice d'ordre } (n,p). \\ X & \text{vecteur colonne des } x_i. \\ B & \text{vecteur colonne des } b_i \end{array} \right.$

(a) Si $n = p$ et $\det(A) \neq 0$: Système de Cramer.
Le système S admet une unique solution $\mathcal{S} = X_0$, où $X_0 = A^{-1}.B$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

(b) Si $rg(A) = r < p$ alors ou $\mathcal{S} = \emptyset$, ou $\mathcal{S}$ s'écrit à l'aide des $p-r$ variables non-principales.

Résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires

1. <u>Systèmes homogènes</u>

Soit le système (S_H) : $\left\{ \begin{array}{rcccccccc} x'_1(t) = & a_{11}x_1(t) & + & a_{12}x_2(t) & + & .. & + & a_{1p}x_p(t) \\ x'_2(t) = & a_{21}x_1(t) & + & a_{22}x_2(t) & + & .. & + & a_{2p}x_p(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n(t) = & a_{n1}x_1(t) & + & a_{n2}x_2(t) & + & .. & + & a_{np}x_p(t) \end{array} \right.$

C'est un système de n équations et p inconnues. On a:

$(S_H) \Longleftrightarrow$ Equation matricielle $X'(t) = A.X(t)$ avec $\left\{ \begin{array}{ll} A = (a_{ij}) & \text{matrice d'ordre } (n,p). \\ X(t) & \text{vecteur colonne des } x_i(t). \end{array} \right.$

Proposition. L'ensemble solution de (S_H) est un s.e.v. $\mathcal{H} = \{X(t), X'(t) = A.X(t)\}$ de l'e.v. composé des fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et $\dim(\mathcal{H}) = n$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\phi_A : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et $\phi'_A(t) = A.\exp(tA) = \exp(tA).A$.

Proposition. L'ensemble solution $\mathcal{H} = \{\exp(tA).X_0; X_0 \in \mathbb{R}^n\}$.

Résolution pratique:

(a) Diagonalisation de A (que l'on suppose possible).

(b) Si A n'a que des valeurs propres simples, alors on cherche un vecteur propre V_i associé à chaque valeur propre λ_i et $(X_1(t) = e^{\lambda_1 t}V_1, .., X_n(t) = e^{\lambda_n t}V_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

(c) Sinon, on essaye de calculer $\exp(tA)$...

2. <u>Systèmes avec second membre</u>

Soit le système (S) : $\left\{\begin{array}{lcccccccccc} x_1'(t) = & a_{11}x_1(t) & + & a_{12}x_2(t) & + & .. & + & a_{1p}x_p(t) & + & b_1(t) \\ x_2'(t) = & a_{21}x_1(t) & + & a_{22}x_2(t) & + & .. & + & a_{2p}x_p(t) & + & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) = & a_{n1}x_1(t) & + & a_{n2}x_2(t) & + & .. & + & a_{np}x_p(t) & + & b_n(t) \end{array}\right.$

C'est un système de n équations et p inconnues. On a:
$(S) \Longleftrightarrow$ Equation matricielle $X'(t) = A.X(t) + B(t)$ avec

$$\left\{\begin{array}{lll} A = (a_{ij}) & \text{matrice d'ordre } (n,p). & \\ X(t) & \text{vecteur colonne des } x_i(t), & \text{fonctions dérivables sur l'intervalle } I. \\ B(t) & \text{vecteur colonne des } b_i(t), & \text{fonctions continues sur l'intervalle } I \end{array}\right.$$

Proposition. Supposons que l'on connaisse $\tilde{X}$ solution particulière de (S). Alors l'ensemble solution de (S) est l'ensemble $\mathcal{S} = \{\tilde{X}(t) + \alpha_1 X_1(t) + .. + \alpha_n X_n(t)\}$, où $X_1, .., X_n$ est une base de $\mathcal{H}$ (voir précedemment).

Propriété. Si $\tilde{X}_1$ est solution particulière de $X'(t) = A.X(t) + B_1(t)$ et $\tilde{X}_2$ est solution particulière de $X'(t) = A.X(t) + B_2(t)$, alors $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$ est solution particulière de $X'(t) = A.X(t) + B_1(t) + B_2(t)$ (superposition des solutions).

Cas particulier. • Si $B(t) = e^{\mu t}\begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}$, où les P_i sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, une solution particulière de (S) est $\tilde{X}(t) = e^{\mu t}\begin{pmatrix} Q_1(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{pmatrix}$, où les Q_i sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que:

(a) $deg(Q_i) \leq \max_j(deg(P_j))$ pour tout $i = 1, .., n$ si $\mu \notin Sp(A)$.

(b) $deg(Q_i) \leq \max_j(deg(P_j)) + m(\mu)$ pour tout $i = 1, .., n$ si $\mu \in Sp(A)$ et $m(\mu)$ est la multiplicité de μ.

• Si $B(t) = e^{\mu t}\begin{pmatrix} P_1(t)\cos(\theta t) + Q_1(t)\sin(\theta t) \\ \vdots \\ P_n(t)\cos(\theta t) + Q_n(t)\sin(\theta t) \end{pmatrix}$, où les P_i et Q_i sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, une solution particulière de (S) est $\tilde{X}(t) = e^{\mu t}\begin{pmatrix} R_1(t)\cos(\theta t) + S_1(t)\sin(\theta t) \\ \vdots \\ R_n(t)\cos(\theta t) + S_n(t)\sin(\theta t) \end{pmatrix}$, où les R_i et les S_i sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que:

(a) $deg(R_i, S_i) \leq \max_j(deg(P_j), deg(Q_j))$ pour tout $i = 1, .., n$ si $\mu e^{i\theta} \notin Sp(A)$.

(b) $deg(R_i, S_i) \leq \max_j(deg(P_j), deg(Q_j)) + m(\mu e^{i\theta})$ pour tout $i = 1, .., n$ si $\mu e^{i\theta} \in Sp(A)$ et $m(\mu e^{i\theta})$ est la multiplicité de $\mu e^{i\theta}$.