TP de Modélisation Stochastique n^0 5 : Temps d'arrêt

Ce TP est centré sur l'utilisation pratique de temps d'arrêt et du théorème d'arrêt. Il est intéressant pour chaque exercice de vérifier théoriquement les propriétés exhibées numériquement, d'autant que les simulations sont souvent insuffisantes pour faire apparaître certaines propriétés (par exemple, le fait qu'un temps d'arrêt soit borné presque sûrement). Notons aussi que la résolution théorique des exercices suivants utilisent implicitement le théorème de convergence des martingales.

Un exemple simple de temps d'arrêt: la ruine du joueur

clf	
$clear$	
$M = input('Fortune\ initiale\ du\ joueur\ ')$	Mettre plutôt une fortune entière (en Fr).
$G(1) = 0; t = 0;$	Initialisations (à ne pas oublier)
$while\ (G(t+1) > -M)\ t = t+1;$	Boucle conditionnée
$u = rand(1);$	
$if\ (u < 0.5)\ G(t+1) = G(t) - 1;$	Le joueur a une probabilité 1/2 de perdre 1 Fr.
end	Fin du if.
$if\ (u >= 0.5)\ G(t+1) = G(t) + 1;$	Le joueur a une probabilité 1/2 de gagner 1 Fr.
end	Fin du if.
end	Fin du $while$.
$plot(F)$	Tracé de l'évolution du gain.

On montre que T, instant de ruine, est presque sûrement fini. en modifiant le programme précédent, renouveller plusieurs fois le calclu de T. Tracer son histogramme et essayer de déterminer son espérance. Que remarque-t-on? Que se passerait-il si la probabilité de gagner 1 Fr était p?
Maintenant, le joueur s'arrête de jouer lorsqu'il est ruiné ou dès que son gain est de 1 Fr. Calculer empiriquement la probabilité de ruine et celle de gain suivant la valeur de M.

Exercices sur les temps d'arrêt

1. On considère (X_n) des v.a.i.i.d. à valeurs dans $\{0, 1, -1\}$, telle que:
$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = (1 - p_n)/2 \text{ et } P(X_n = 0) = p_n.$$
On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - p_n) = +\infty$. Soit $S_n = X_1 + .. + X_n$ et soit $T = \inf\{n \mid S_n \notin]-a, b[\}$, où $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Vérifier expérimentalement que T est presque sûrement fini (prendre diverses valeurs de a et b). Montrer numériquement que $P(S_T = -a) = \frac{b}{a+b}$. Que se passe-t-il si $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - p_n) < +\infty$?

2. Soit (X_n) des v.a.i.i.d. suivant une loi binomiale de paramètre p, et soit $S_n = X_1 + .. + X_n$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\tau = \inf\{n \mid S_n = m\}$. Vérifier que τ est fini presque sûrement, représenter la loi de $\tau - m$ (histogramme) et donner une approximation de $\mathbb{E}(\tau)$ pour différentes valeurs de m et de p (loi de Pascal ou binomiale négative).

3. On considère des objets produits par une machine, dont chacun a une probabilité p d'être défectueux $(0 \leq p < 1)$. On choisit 100 objets et on note $X_i = 1$ si l'objet i est défectueux, $X_i = 1$ sinon. Soit $\tau = \inf\{n \mid X_n = 1\}$. Vérifier que $\nu = \inf(\tau, 100)$ est fini, donner des approximations de $P(\tau \leq 100)$ et de $\mathbb{E}(\nu)$ (en fonction de p que vous ferez varier).

4. Soit (X_n) des v.a.i.i.d. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \leq 1$. Soit $Y_n = X_n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $S_n = X_1 + .. + X_n$. On note $T = \inf\{n \mid S_n = -1\}$. Vérifier que T est presque sûrement fini et donner une approximation de son espérance. Qu'en pensez-vous? Peut-on obtenir par simulation la loi de T? Faire le même exercice avec pour loi des X_i une loi géométrique de paramètre $1/2$ et $Y_n = X_n - 2$. Conclusion?

5. Reprendre le modèle d'Ehrenfest. En notant n le nombre total de boules, et en supposant que l'on ait 0 boule initialement dans l'urne 1, donner une approximation de l'espérance du temps nécessaire pour avoir à nouveau 0 boule dans l'urne 1 (vérifier que cette espérance est 2^{-n}).