TP de Modélisation Stochastique n^0 14 : Durée de vie, processus de Poisson et de renouvellement

1 Rappels

1.1 Rudiments de fiabilité

Soit T la date de première défaillance d'un système mis en marche à la date $t = 0$. Alors:

1. La **durée de vie** du système est la variable T.
2. La **fiabilité** à la date t est: $R(t) = P(T \geq t)$.
3. La **durée de survie** du système à l'instant t est la variable T_t de distribution:
$$P(T_t \geq s) = P(T - t \geq s | T \geq t) = \frac{R(t+s)}{R(t)} \text{ pour } s \geq 0.$$
4. Le **taux de défaillance** ou **taux de panne**du système est la fonction $h(t) = -\dfrac{R'(t)}{R(t)}$.
5. Le **temps moyen de panne** du système (M.T.T.F.) est: $m = \mathbb{E}T$.

Soit un système de n composantes chacun de durée de vie T_i. On note T la durée de vie du système. Alors:

1. Si les composants sont en série, $T = \min(T_1, .., T_n)$ et $R(t) = R_1(t)R_2(t)..R_n(t)$.
2. Si les composants sont en parallèle, $T = \max(T_1, .., T_n)$ et $R(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))..(1 - R_n(t))$.

1.2 Loi exponentielle et autres

La loi exponentielle (de paramètre λ) est souvent utilisée pour modéliser une durée de vie T. Elle vérifie:

- Sa densité est: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{\{t \geq 0\}}$.
- Ses moments sont: $\mathbb{E}T = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{var}(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
- Sa fiabilité est $R(t) = e^{\lambda t}$ si $t \geq 0$.
- Sa durée de survie à l'instant t est indépendante de t (système sans mémoire), soit: $P(T \geq t + s | T \geq t) = P(T \geq s)$.

La somme de n variables i.i.d. exponentielles de paramètre λ est une loi Gamma de paramètres (λ, n), dite aussi loi de Erlang, et de densité: $\dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)} e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{\{t \geq 0\}}$.

Une autre loi utilisée pour modéliser les durées de vie est la de Weibull $W(a, b)$ telle que sa fiabilité est $R(t) = 1 - F(t) = e^{-(bt)^a} \mathbb{I}_{\{t \geq 0\}}$. Elle modélise bien le comportement de a composants de loi exponentielle de paramètre b en parallèle pour t pas trop grand. On a: $\mathbb{E}T = \dfrac{\Gamma(1/a)}{ab}$.

1.3 Processus de Poisson

On considère une suite (X_k) de v.a.i. suivant une loi exponentielle de paramètre θ. On pose $T_n = X_1 + .. + X_n$ et $T_0 = 0$. Pour $t \geq 0$, on associe $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{T_n \leq t\}}$ appelé processus de comptage, ou **processus de Poisson** d'intensité θ. On montre que pour tout $t \geq 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre $\theta.t$.

1.4 Processus de renouvellement

La définition d'un **processus de renouvellement** reprend celle d'un processus de Poisson, si ce n'est que les $(X_k)_{k\geq 2}$ ont une même loi quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et que X_1 n'a pas forcément la même loi que les $(X_k)_{k\geq 2}$.

2 Exercices

1. Simuler un processus de Poisson à l'aide d'exponentielles de paramètre λ. Tracer la trajectoire de ce processus. Pour une valeur de t quelconque, donner N_t. Déterminer un estimateur de λ et donner un intervalle de confiance sur la valeur obtenue pour une trajectoire.

2. Simuler un processus de renouvellement pour lequel T_1 a une loi uniforme et les durées d'intrarrivées une loi de Weibull. Vérifier que N_t/t temps vers une constante. Quelle est la loi asymptotique de N_t/t?

3. On considère un processus de Poisson d'intensité λ. A chaque saut du processus, on note A le saut avec une probabilité p et B avec une probabilité $1-p$. Vérifier que les processus de comptage des A et des B, notés N^A et N^B sont des processus de Poisson. Quelles sont leurs intensités? Sont-t-ils indépendants l'un de l'autre? Le vérifier à l'aide d'un test du χ^2.

4. On suppose que (T_n) est un processus de renouvellement avec $T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k$, les v.a.i.i.d. τ_k étant distribuées suivant une loi sur $\mathbb{R}^+$ possédant un moment d'ordre 2. On considère ensuite un processus de Poisson $N = (N_t t \geq 0)$ d'intensité θ, indépendant du processus T_n. On pose $X_n = N_{T_n}$ pour $n = 0, 1, \ldots$ Construire T_n, N et en déduire X_n (choisir différentes lois pour τ_k). Vérifier que la suite (X_n/n) possède une limite lorsque $n \to \infty$ et qu'il existe a_n et b_n tels que $(X_n - a_n)/b_n$ converge vers une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

5. On considère une machine qui peut tomber en panne pendant un certain temps. On considère $(X_1, X_2, ..)$ (resp. $(Y_1, Y_2, ..)$) des v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité f_x (resp. f_Y), d'espérance m_x finie (resp. m_Y finie). Les X_k sont les durées de bon fonctionnement et sont indépendantes des Y_k, durées de pannes successives. On pose $T_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = T_{n-1} + X_n$ et $T_n = S_n + Y_n$. Ainsi, les intervalles $[T_n, S_{n+1}[$ sont les intervalles de bon fonctionnement et les $[S_n, T_n[$ les intervalles de panne.
   (a) On choisit f_X comme une loi de Weibull $(5,1)$ et f_Y une loi exponentielle de paramètre 3. Représenter (T_n) dont on montre que c'est un processus de renouvellement.
   (b) Montrer que lorsque $t \to \infty$, $P(t \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[T_n, S_{n+1}[)$ tend vers une constante $(m_X/(m_X + m_Y))$.

6. **Exercice d'illustration** On considère une machine qui peut tomber en panne, mais qui est réparé instantanément (par exemple, une machine avec une pile, une lampe avec une ampoule,..). On suppose que la durée de vie moyenne entre chaque panne est de m. On note par N le processus de renouvellement correspondant au nombre de pannes, et par T_k la durée de vie après la panne k (possédant un moment d'ordre 2).
   (a) On choisit pour loi des T_k une loi exponentielle de paramètre 0.5 (unité de temps: le mois?). Représenter N_t, puis N_t/t pour $t \in [0, 100]$.
   (b) Faire 1000 calculs de N_{100} et montrer par un histogramme que N_{100} suit approximativement une loi normale.

Les preuves, détails et explications sont donnés p. 134-138, Fiabilité des systèmes, J.L. Bon, Masson