TP de Modélisation Stochastique n^0 12 : Chaînes de Markov dénombrables

1 Exercices faisant appel aux chaînes de Markov dénombrables

1. On considère **le processus de vie et de mort** suivant: on note N_k le nombre d'individus à l'instant k et $N_0 = 0$; on a $P(N_{k+1} = 1|N_k = 0) = p$ et $P(N_{k+1} = 0|N_k = 0) = 1 - p$, ainsi que $P(N_{k+1} = n+1|N_k = n) = p_n$ et $P(N_{k+1} = n-1|N_k = n) = 1 - p_n$ avec $p > 0$. Choisir d'abord, $p_n = p$ et simuler la chaîne. Suivant la valeur de p choisie, est-elle récurrente ou transiente? Représenter graphiquement la mesure stationnaire associée. Donner l'espérance du temps de retour en 0. Faire la même chose avec $p_n = p/n$.

2. **Marche aléatoires dans $\mathbb{Z}$** On définit la marche aléatoire suivante :

   - On pose $X(0) = 0$.
   - A l'étape k, on pose $X(k) = X(k-1) + 1$ avec une probabilité p et $X(k) = X(k-1) - 1$ avec une probabilité $1 - p$.

   Que peut-on dire sur $\mathrm{E}X(k)$ et $\mathrm{Var}X(k)$ si $p = 1/2$? et si $p > 1/2$? Simuler plusieurs trajectoires de longueur n dans le cas $p = 1/2$. Etudier $\min_{1 \le k \le n} X(k)$ et $\max_{1 \le k \le n} X(k)$. Pour différentes valeurs de A, estimer le premier temps de passage de la chaîne en A lorsqu'elle part de 0.

3. **Marche aléatoires dans $\mathbb{Z}^2$** On définit maintenant la marche aléatoire suivante :

   - On pose $X(0) = (0, 0)$.
   - A l'étape k, on définit les transitions de la composante X_1 par le tableau suivant :

	$X_1(k-1) = 0$	$X_1(k-1) > 0$	$X_1(k-1) < 0$
$\mathrm{P}\Big(X_1(k) = X_1(k-1) - 1\Big)$	$1/3$	p	q
$\mathrm{P}\Big(X_1(k) = X_1(k-1) + 1\Big)$	$1/3$	q	p
$\mathrm{P}\Big(X_1(k) = X_1(k-1)\Big)$	$1/3$	$1 - p - q$	$1 - p - q$

   (Idem avec l'autre composante X_2)

   Simuler et représenter graphiquement différentes trajectoires $(X(k))$ obtenues avec différentes valeurs de p et q. Représenter sous forme d'un histogramme les distributions empiriques de X_1 et X_2. Commenter.

4. **Promenade aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$**. On se place d'abord dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $X_0 = 0$ et $P(X_{k+1} = X_k + 1) = P(X_{k+1} = X_k - 1) = 1/2$. Simuler cette chaîne et tracer $|X_k|$ en fonction de k. Cette chaîne est récurrente nulle ce qui signifie qu'elle repasse presque sûrement en 0 mais que l'éspérance de ce temps de retour est infini. Pouvez-vous observer ceci numériquement? Faire la même chose dans $\mathbb{Z}^2$ et dans $\mathbb{Z}^3$ (on considère $\| X \|$ au lieu de $|X|$) en essayant de distinguer numériquement la récurrence du premier cas de la transience du second. Est-ce possible?

5. **Processus de population avec immigration**. On note N_k le nombre d'individus d'une population à l'instant k avec $N_0 = 0$. On suppose que d'une génération (k) à l'autre $(k+1)$ un certain nombre (B_k) d'individus disparaissent (B_k suit une binomiale de paramètre $(N_k, 1-p)$) et un autre nombre (P_k) d'individus apparaissent, qu'ils soient issus d'immigration ou natifs de cette nouvelle génération (P_k suit une loi de Poisson de paramètre cp, où $c > 0$). On suppose que les (B_k) et les (P_k) sont indépendants et indépendants entre eux. N_k forme une chaîne de Markov. Simuler les N_k et les représenter en fonction de k pour différentes valeurs de p et de c ($p = 1/4,\ 1/2,\ 3/4$ et $c = 1/2,\ 0.9,\ 1,\ 1.1,\ 2$). Déterminer la mesure invariante.