TP de Modélisation Stochastique: Illustrations pour l'épreuve (I)

1 Leçon sur les processus de renouvellement (thème 14)

(Programme **Poisson2.m** avec sous-programme **Proc_Poisson.m**) On considère une machine qui peut tomber en panne, mais qui est réparé instantanément (par exemple, une machine avec une pile, une lampe avec une ampoule,..). On suppose que la durée de vie moyenne entre chaque panne est de m. On note par N le processus de renouvellement correspondant au nombre de pannes, et par T_k la durée de vie avant la panne k (possédant un moment d'ordre 2).

1. On choisit pour loi des T_k une loi exponentielle de paramètre 0.5 (unité de temps: le mois?). Représenter N_t, puis N_t/t pour $t \in [0, 100]$.
2. Faire 1000 calculs de N_{100} et montrer par un histogramme que N_{100} suit approximativement une loi normale.

Les preuves, détails et explications sont donnés p. 134-138, Fiabilité des systèmes, J.L. Bon, Masson

2 Leçon sur la Loi des Grands Nombres (thème 1)

(Programme **Poisson2.m** avec sous-programme **Proc_ Poisson.m** légèrement modifiés) Même situation que la précédente.

1. On choisit pour loi des T_k une loi exponentielle de paramètre 0.5. Représenter N_t/t pour $t \in [0, 1000]$.
2. On choisit pour loi des T_k une loi ne possèdant pas de moment d'ordre 1. Par exemple, $T_k = |Z|$, où Z est une variable de Cauchy centrée (que l'on génère avec $T_k = \tan(\frac{\pi}{2}U)$ où U est une loi uniforme sur $[0, 1]$). Représenter N_t/t pour $t \in [0, 1000]$.

Les preuves, détails et explications sont donnés p. 134-138, Fiabilité des systèmes, J.L. Bon, Masson. Voir aussi la leçon 1 des Thèmes de probabilités et statistiques.

3 Leçon sur le Théorème de Limite Centrale (thème 2)

(Programme **Poisson2.m** avec sous-programme **Proc_ Poisson.m** légèrement modifiés) Même situation que la précédente.

1. On choisit pour loi des T_k une loi exponentielle de paramètre 0.5. Faire 1000 calculs de $N_{100}/100$ et montrer par un histogramme que $N_{100}/100$ suit approximativement une loi normale de moyenne $0.5 = \lambda = 1/m$ et de variance $0.005 = \lambda^3/(\lambda^2.n) = \sigma^2/(m^3.n)$.
2. Représenter sur le même graphe, l'histogramme obtenu à partir de 1000 réalisations d'une variable $\mathcal{N}(0.5, 0.005)$.

Les preuves, détails et explications sont donnés p. 134-138, Fiabilité des systèmes, J.L. Bon, Masson. Voir aussi la leçon 2 des Thèmes de probabilités et statistiques.

4 Leçon sur les constructions d'intervalles de confiance (thème 9)

(Programme **Intervalle.m**) Même situation que la précédente. On suppose que l'on connaît l'échantillon $(T_1, .., T_n)$, durées de vie entre les n premières pannes. On veut estimer le MTTF, c'est-à-dire le temps moyen avant la panne qui vaut $\mathbb{E}T$. On suppose que la loi des T_k une loi exponentielle de paramètre 1 (donc $MTTF = 1$).

1. On choisit pour estimateur du MTTF la moyenne $\bar{T}_n = (T_1 + .. + T_n)/n$ et on utilise le TLC pour obtenir des intervalles de confiance à 95%, $I_n = [\bar{T}_n - \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}, \bar{T}_n + \frac{1.96\sigma_n}{\sqrt{n}}]$ (on se sert de la commande test1n). On représente les bornes de I_n pour n variant entre 10 et 150.
2. On peut obtenir des intervalles de confiance à 95% **exacts** en utilisant le fait que $T_1 + .. + T_n$ suit une loi Gamma $\Gamma(n, 1)$. Sur le même graphe que le précédent, on ajoute les bornes de ces intervalles de confiance exacts, pour n variant entre 10 et 150.

Les preuves, détails et explications sont donnés p. 69-70, Fiabilité des systèmes, J.L. Bon, Masson. Voir aussi la leçon 5 des Thèmes de probabilités et statistiques.

5 Leçon sur les évènements de faible probabilité (thème 10)

(Programme **PGD.m**) Même situation que la précédente. On veut évaluer la probabilité que le temps pendant lequel on a eu n pannes soit inférieur à αn, où α est inférieur au MTTF (pour calculer par exemple le risque de n'être pas approvisionner à temps). On suppose que l'on connaît l'échantillon $(T_1, .., T_n)$, durées de vie entre les n premières pannes. Ceci revient à calculer $P(T_1 + .. + T_n < \alpha.n)$. On calcule la valeur exacte, puis les approximations par le TLC et le Principe de Grandes Déviations de cette probabilité.

1. On suppose que la loi des T_k une loi exponentielle de paramètre 1 (donc $MTTF = 1$) et on chosit $\alpha = 0.9$. On utilise le fait que $T_1 + .. + T_n$ suit une loi Gamma $\Gamma(n, 1)$ pour le calcul exact. L'approximation par le PGD demande à déterminer la transformée de Cramer d'une loi exponentielle qui est $\lambda x - 1 - \log(\lambda x)$ pour $x > 0$. Sur le même graphe, on trace $\frac{1}{n} \log P(T_1 + .. + T_n < \alpha.n)$ pour n variant de 100 à 10000.

Voir la leçon 3 des Thèmes de probabilités et statistiques.

6 Leçon sur la fonction de répartition empirique (thème 11)

(Programme **Empirique.m**) Même situation que le paragraphe 1. On suppose que l'on connaît l'échantillon $(T_1, .., T_{100})$. On veut faire un test d'adéquation pour tester si la loi des T_k est bien une loi exponentielle de paramètre 0.5.

1. On génère les T_k avec une loi exponentielle de paramètre 0.5. On utilise le test de Kolmogorov-Smirnov pour valider avec un risque 5% l'hypothèse que la loi est bien exponentielle.
2. On génère 2 échantillons $(T_1, .., T_{100})$ et $(T'_1, .., T'_{100})$, le premier avec une loi exponentielle de paramètre 0.5, le second avec une loi exponentielle de paramètre $100/(T'_1 + .. + T'_{100}$ (soit l'estimateur naturel du paramètre λ). On utilise le test de Kolmogorov-Smirnov pour tester avec un risque 5% que les deux échantillons ont mêmes lois.

Les preuves, détails et explications sont donnés p. 69-70, Fiabilité des systèmes, J.L. Bon, Masson. Voir aussi la leçon 8 des Thèmes de probabilités et statistiques.

7 Leçon sur une méthode probabiliste d'approximation d'une intégrale (thème 4)

(Programme **Montecarlo.m**) On veut donner une valeur approchée de $I = \int_0^1 \int_0^1 xy \sin^2(\frac{1}{xy}) dxdy$ (on travaille avec une intégrale à deux paramètre pour que l'approximation par Monte-Carlo soit plus intéressante que celle par une méthode déterministe).

1. On calcule I comme $\mathbb{E}\left(XY \sin^2(\frac{1}{XY})\right)$, où les X et Y sont des v.a.i.i.d. sur $[0, 1]$. On approche cette espérance par la moyenne empirique I_n des $X_i Y_i \sin^2(\frac{1}{X_i Y_i})$ pour deux échantillons $(X_1, ..X_n)$ et $(Y_1, .., Y_n)$. Donner un intervalle de confiance à 95% de I pour $n = 100, 1000, 10000$.
2. Comme $xy \sin^2(\frac{1}{xy})$ appartient à $[0, 1]$, on calcule I en simulant un échantillon $((X_1, Y_1, Z_1), .., (X_n, Y_n, Z_n))$ de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]^3$ et on calcule la proportion de triplets vérifiant $Z \leq XY \sin^2(\frac{1}{XY})$ (approximation de $P\left(Z \leq XY \sin^2(\frac{1}{XY})\right)$). Donner un intervalle de confiance à 95% de I pour $n = 100, 1000, 10000$.

Cet exercice est proposé dans Probabilités de l'ingénieur, N. Bouleau, p.330. On pourra aussi consulter le premier chapitre de Méthodes de Monte-Carlo pour les équations ..., Lapeyre, Pardoux et Sentis, ou la leçon 4 des Thèmes de probabilités et statistiques.